Colegiul Național „Carol I” Craiova

Concursul interjudeţean de matematică

„ION CIOLAC”

Ediția a XXIV-a

17 mai 2025

200 de ani ISTORIE EDUCAȚIE PERFORMANȚĂ

SUBIECTE

Clasa a III–a

Problema 1.

Calculați diferența numerelor a și b, știind că $a = 9 \times 8 - 7 \times 6 + 5 \times 4 - 3 \times 2 + 1$ și $5 \times (4 + 4 : b) + 5 \times 4 = 55 - 5$.

Problema 2.

a) Se consideră un șir format din șase numere impare consecutive, scrise în ordine crescătoare. Știind că suma dintre cel mai mic și cel mai mare dintre ele este egală cu cel mai mic număr natural de trei cifre care are suma cifrelor egală cu 9, determinați al patrulea termen din șir.

Ionela Turturean, Satu Mare

Supliment „Gazeta Matematică" Nr.2/ 2025

b) Alina are mai puțin de 270 lei. Dacă ar avea de cinci ori mai mulți bani decât are, ar depăși suma de 270 lei cu tot atâția bani câți îi lipsesc pentru a avea 270 lei. Câți lei îi lipsesc Alinei pentru a avea 270 lei?

Prof. Aurelia Petrică, C.N. „Carol I", Craiova

Problema 3.

a) Produsul a patru numere naturale distincte este 24. Aflați suma numerelor.

b) În câte moduri puteți completa căsuțele goale de mai jos cu numere astfel încât produsul numerelor din oricare trei căsuțe alăturate să fie 24? Justificați răspunsul dat!

3							2			

Prof. Aurelia Petrică, C.N. „Carol I", Craiova

Clasa a IV–a

Problema 1. Bunica avea de 4 ori mai mulți curcani decât cocoși. După ce a vândut vecinei 2 curcani și a cumpărat un cocoș, aceștia din urmă au devenit de 3 ori mai puțini decât curcanii. Câți curcani și câți cocoși are acum bunica?

Valentina și Eugenia Pârvulescu, Giurgiu

Supliment „Gazeta Matematică" nr.2/2025

Problema 2. Pe o tablă este scris un număr cu 100 de cifre, format prin alăturarea câtorva numere 2025:

$$202520252025 \ldots 2025$$

a) Câte cifre 2 sunt scrise pe tablă?
b) Ana, Bianca și Corina au adunat la întâmplare câte 30 de cifre consecutive din acest număr. Este posibil ca fetele să fi obținut rezultate diferite? Justifică răspunsul.

Prof. Luminița Popescu, C.N. „Carol I", Craiova

Problema 3. În două cutii sunt în total 2025 de bile. Mutăm din a doua cutie în prima $\frac{2}{3}$ din numărul bilelor care se află în prima cutie. Apoi se iau din prima cutie $\frac{2}{3}$ din numărul bilelor aflate acum în a doua și se pun în a doua cutie. În final, după cele două mutări, numărul bilelor rămase în prima cutie este $\frac{4}{5}$ din al celor din a doua. În ce cutie erau la început mai multe bile și cu cât?.

Prof. Monica Stanca, C.N. „Carol I", Craiova

Clasa a V–a

Problema 1. Fie $A = 2^{2026} + 2^{2025} + 2^{2022}$. Demonstrați că $(A - 600) \vdots 1000$.

Gazeta Matematica Nr.2/2025

Problema 2. a) Fie numărul $N = \overline{2024\underbrace{99 \dots 9}_{n\ cifre\ de\ 9}}$. Aflați restul împărțirii lui N la 24.

b) Arătați că există numere naturale nenule x și y pentru care $x^2 + y^3 = 2025^{2023}$.

Problema 3. Determinați toate numerele naturale n pentru care suma celor mai mari trei divizori ai acestuia este 79.

Popescu Luminița

Clasa a VI–a

Problema 1. Se consideră numerele naturale nenule x, y, z care au proprietatea $\frac{73+y+x^3}{20} = \frac{5y^2}{2} = \frac{100}{z}$. Arătați că fracția $\frac{x^2+y^2+z^2}{z-y-x}$ este număr prim.

Codruț Sorin Zmicală, Sighetul Marmației

G.M. 2/2025

Problema 2.
a) Fie $a, b \in \mathbb{N}^*$. Demonstrați că dacă $2024^a + 2025^b = 2024^b + 2025^a$, atunci $a = b$
b) Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația

$$2024^{9x^2+y} + 2025^{3xy+28} = 2024^{3xy+28} + 2025^{9x^2+y}$$

Prof. Georgescu Carmen-Liana, C.N. „Carol I”, Craiova

Problema 3. In triunghiul ascuțitunghic ABC se construiesc înălțimea $[AD]$ și mediana $[AM]$ cu D, $M \epsilon (BC)$. Fie punctele E și F astfel încât D este mijlocul lui $[AF]$ și M este mijlocul lui $[AE]$, iar $BF \cap CE = \{P\}$.

a) Demonstrați că $[PB] \equiv [PC]$
b) Demonstrați că $EF \parallel CB$ și că PM este mediatoarea segmentului $[EF]$

Culegere de probleme

Clasa a VII–a

Problema 1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$\{x\} \cdot [x] = 2025 \cdot x,$$

unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a a numărului *x*, iar $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului *x*.

Prof. Gabriel Tica, C.N. „Carol I", Craiova

Problema 2. Determinați numerele reale pozitive x, y, z care au proprietățile:

$$2x - 2y + \frac{1}{z} = \frac{1}{2025},\ \ 2y - 2z + \frac{1}{x} = \frac{1}{2025},\ \ 2z - 2x + \frac{1}{y} = \frac{1}{2025}.$$

Prof. Mihaela Berindeanu, Gazeta Matematică

Problema 3. Fie triunghiul ascuțitunghic ABC, cu $\widehat{BAC} = 60^o$. Semidreptele $(BD$ și $(CE$ sunt bisectoarele unghiurilor $\widehat{ABC}$ și respectiv $\widehat{ACB}$, $D \in (AC)$, $E \in (AB)$ și $\{I\} = BD \cap CE$. Pe semidreptele $(BD$ și $(CE$ considerăm punctele B', respectiv C', astfel încât $AB'IC'$ să fie paralelogram, $D \in (BB')$, $E \in (CC')$. Arătați că dreapta $B'C'$ trece printr-un punct comun cercurilor circumscrise triunghiurilor BEB' și CDC'.

Prof. Gabriel Tica, C.N. „Carol I", Craiova

Clasa a VIII–a

Problema 1.

a) Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Dacă $\max(a,b) = \min(a,b)$, atunci $a = b$.
b) Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația $2^{\max(x^3,\ 3x-2)-\min(x^3,\ 3x-2)} + 2^{\min(x^3,\ 3x-2)-\max(x^3,\ 3x-2)} = 2$.

Carmen-Liana Georgescu, C. N. „Carol I”, Craiova

Problema 2.

Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare, punctul M mijlocul segmentului (BC), iar punctele $P,\ Q,\ R,\ S,\ R'$ și respectiv S' astfel încât $P \in (AM), Q \in (DM), BP \cap AC = \{R\}, CP \cap AB = \{S\}, BQ \cap CD = \{R'\}, QC \cap BD = \{S'\}$.
Demonstrați că dreptele SS' și RR' sunt coplanare.

Ștefan Gobej, elev, Curtea de Argeș,
Gazeta Matematică 2/2025

Problema 3.

Suma volumelor a 2025 de cuburi, nu neapărat identice, este egală cu $343\ m^3$. Demonstrați că suma lungimilor tuturor muchiilor acestor cuburi este mai mare decât $84\ m$.

Raluca Ciurcea, C. N. „Carol I”, Craiova

Clasa a IX–a

Problema 1. Aflați șirul de numere naturale nenule $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ astfel încât

$$\frac{a_1}{2!}+\frac{a_2}{3!}+\cdots+\frac{a_n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{n+1}},$$

pentru orice număr natural nenul n, unde $k!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k$ pentru orice $k\in\mathbb{N}^*$.

Adaptare Florin Rotaru, SGM 12/2024

Problema 2. Fie $a,b,c>0$. Demonstrați inegalitatea:

$$a^2+b^2+c^2+abc+4\geq 2ab+2bc+2ac.$$

***

Problema 3. Fie un triunghi ABC și punctele $M\in(AB), N\in(AC)$. Demonstrați că dreapta MN trece prin mijlocul medianei din A a triunghiului ABC dacă și numai dacă

$$\frac{AM}{BM}+\frac{AN}{CN}=2\cdot\frac{AM\cdot AN}{BM\cdot CN}.$$

Adrian Bud, G. M. 2/2025

Clasa a X–a

Problema 1. Se consideră punctele A și B din planul complex, având afixele $z_A = 3i$ și $z_B = 4$.

a) Calculați lungimea segmentului AB.

b) Determinați numărul complex z de modul minim care verifică relația

$$|z-3i|+|z-4|=5.$$

Problema 2. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$\log_2(x^5+x^3+2)=1+4\log_4 x+x(2-x).$$

Gazeta Matematică 2/2025

Problema 3. Fie $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ o funcție care verifică următoarele relații: $f(x^3)=(f(x))^3$ și $f(2x)=f(x)$, pentru orice $x\in(0,\infty)$. Calculați toate valorile posibile pentru $f(2^{2025})-f(\sqrt[2025]{2})$.

Prof. Luminița Popescu, C.N. „Carol I”, Craiova

Clasa a XI–a

Problema 1. Determinați funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, care sunt continue în punctul $x_0 = 0$ și care verifică relația $f(x)f(3x)f(9x) = 3^{13x}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Gazeta Matematică nr.2/2025

Problema 2. Să se calculeze $lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(sin\frac{k}{n^2} + cos\frac{\sqrt{k}}{n}\right)$.

Prof. Spiridon Cătălin, C.N. „Carol I”, Craiova

Problema 3. Fie $n \geq 1$ un număr natural și matricele $A, B \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$, astfel încât $AB - BA = (AB - BA)^*$, unde $(AB - BA)^*$ reprezintă adjuncta matricei $AB - BA$. Să se arate că $AB = BA$.

Soluții și barem de corectare

Clasa a III-a

Problema 1.

$a = 9 \times 8 - 7 \times 6 + 5 \times 4 - 3 \times 2 + 1 = 72 - 42 + 20 - 6 + 1 = 45$ 2p

$5 \times (4 + 4 : b) + 20 = 50$ 2p

$4 + 4 : b = 6 \Rightarrow \ b = 2$ 2p

$a - b = 45 - 2 = 43$ 1p

Problema 2.

a) Cel mai mic număr natural de trei cifre care are suma cifrelor egală cu 9 este 108 ....1p

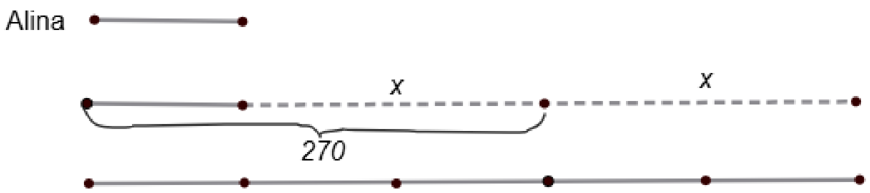
Fie $a, \ a+2, \ a+4, \ a+6, \ a+8, a+10$ cele șase numere impare consecutive. Avem

$a + a + 10 = 108$...1p

Obținem $a = 98 : 2 = 49$...1p

Al patrulea termen din șir este $49 + 6 = 55$. 1p

b)



.... .1p

$270 : 3 = 90$ *lei* are Alina 1p

Alinei îi lipsesc $x = 270 - 90 = 180$ *lei*.. ....1p

Problema 3.

a) $24 = 1 \times 2 \times 3 \times 4$ 1p

$1 + 2 + 3 + 4 = 10$... .....1p

b)

3	a	b	c	d	e	f	2	g	h	i

$3 \times a \times b = a \times b \times c = 24$ și obținem $c = 3$ și $a \times b = 8$...1p

3	a	b	3	d	e	f	2	g	h	i

$a \times b \times 3 = b \times 3 \times d = 3 \times d \times e = 24, \ a = d$ și $b = e$ 1p

3	a	b	3	a	b	f	2	g	h	i

$3 \times a \times b = a \times b \times f = b \times f \times 2 = 24$, de unde $f = 3, b = 4$ și $a = 2$ 2p

Avem o singură soluție :

3	2	4	3	2	4	3	2	4	3	2

....1p

Clasa a IV-a

Problema 1.

Soluția I

Notând cu a numărul inițial de curcani și cu b numărul inițial de cocoși avem $a = 4b$ 1p
După ce vinde 2 curcani și cumpără un cocoș, avem $a - 2 = 3(b + 1)$ 1p
Din cele două relații obținem $4b - 2 = 3b + 3$ 1p
$4b = 3b + 5$, deci $b = 5$ și $a = 4 \cdot 5 = 20$ 2p
Bunica are acum $5 + 1 = 6$ cocoși și $20 - 2 = 18$ curcani 2p

Soluția a II-a

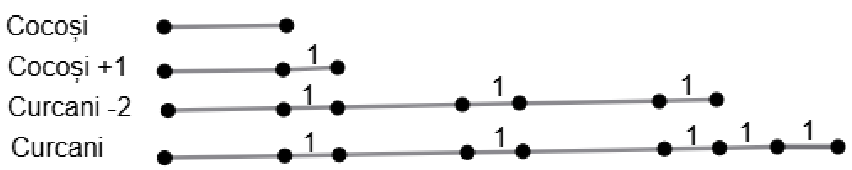
Inițial: $\begin{matrix}A\\BBB\cancel{B}\end{matrix}\quad\begin{matrix}A\\BBB\cancel{B}\end{matrix}\quad\underbrace{\begin{matrix}A\\BBBB\end{matrix}\qquad\begin{matrix}A\\BBBB\end{matrix}}_{3\ grupe}$

Final: $\begin{matrix}A\\BBB\end{matrix}\quad\begin{matrix}A\\BBB\end{matrix}\quad\begin{matrix}A\\BBB\end{matrix}\quad\begin{matrix}A\\BBB\end{matrix}\quad\begin{matrix}A\\BBB\end{matrix}\quad\begin{matrix}A\\BBB\end{matrix}$

Deoarece erau de 4 ori mai mulți curcani decât cocoși, la început se puteau face un număr necunoscut de grupe de tipul A BBBB, unde A reprezintă un cocoș și B un curcan 1p
Când bunica a vândut doi curcani, două grupe au devenit de forma A BBB 1p
După ce a cumpărat un cocoș, știm că au devenit de 3 ori mai puțini cocoși decât curcani, adică se pot face numai grupe de forma A BBB 1p
Cocoșul cumpărat se va grupa cu 3 curcani, aceștia fiind luați din trei grupe de tipul A BBBB (care trebuie să rămână tot de forma A BBB) 1p
În final bunica are $2 + 1 + 3 = 6$ grupe de păsări, toate de forma A BBB (două grupe de unde vânduse câte un curcan, o grupă cu cocoșul cel nou cumpărat și trei grupe de unde s-a luat câte un curcan cu care s-a format grupa cocoșului nou) 1p
Bunica are acum $6 \cdot 1 = 6$ cocoși și $6 \cdot 3 = 18$ curcani 2p

Soluția a III-a

Reprezentăm printr-un segment numărul inițial de cocoși și pornim de la situația finală, când sunt de 3 ori mai mulți curcani.



.... 4p
Deoarece la început erau de 4 ori mai mulți curcani decât cocoși, comparând primul și ultimul desen deducem că un segment trebuie să fie egal cu 5, adică erau 5 cocoși la început. 1p
Bunica are deci acum $5 + 1 = 6$ cocoși și $3 \cdot 6 = 18$ curcani 2p

Problema 2.

a) Deoarece 2025 are 4 cifre și numărul scris pe tablă are 100 cifre, deducem că a fost scris repetat 2025 de $100:4=25$ ori 1p

Numărul 2025 are 2 cifre 2, deci sunt scrise $25\cdot 2=50$ de cifre 2 .... 1p

Soluția I

b) Sunt posibile 4 sume de 30 de cifre consecutive, fiecare începând cu una din cifrele lui 2025. Cum 30 dă câtul 7 și restul 2 la împărțirea cu 4, secvența de 30 de cifre consecutive va conține grupa 2025 de 7 ori la rând plus încă 2 cifre sau de 6 ori la rând plus încă 6 cifre, situate înainte și după grupele 2025 complete.

Dacă începem cu prima cifră 2 de la un număr 2025 din cele scrise pe tablă, avem suma celor 30 de cifre consecutive $S_1=7\cdot(2+0+2+5)+2+0=7\cdot 9+2=65$ 1p

Dacă începem cu 0, avem $S_2=0+2+5+6\cdot(2+0+2+5)+2+0+2=7+6\cdot 9+4=65$ 1p

Dacă începem cu al doilea 2, avem $S_3=2+5+7\cdot(2+0+2+5)=7+7\cdot 9=70$ 1p

Dacă începem cu 5, avem $S_4=5+7\cdot(2+0+2+5)+2=5+7\cdot 9+2=70$ 1p

Nu am obținut trei numere diferite, deci nu este posibil ca fetele să fi obținut rezultate diferite. 1p

Soluția a II-a

b) O secvență de 30 de cifre consecutive va conține de 7 ori cifrele 2, 0, 2, 5 (indiferent care e prima, se vor repeta toate de 7 ori), plus încă două cifre 1p

Cele două cifre pot fi: 20, 02, 25 sau 52 .... 1p

Sumele posibile pentru cele 30 de cifre sunt deci $7\cdot(2+0+2+5)+2+0$ sau $7\cdot(2+0+2+5)+2+5$, adică se pot obține doar două valori 2p

Nu am obținut trei numere diferite, deci nu este posibil ca fetele să fi obținut rezultate diferite. 1p

Problema 3.

Soluția I

Dacă notăm cu a o cincime din numărul final de bile din a doua cutie, atunci în a doua cutie sunt $5\cdot a$ bile și în prima $4\cdot a$ bile deci avem $4a+5a=2025$, de unde $a=225$ (sau desen cu segmente și o parte egală este $2025:9=225$). În final, prima cutie are $4\cdot 225=900$ bile, iar a doua $5\cdot 225=1125$ bile 2p

Dacă notăm cu b o treime din numărul de bile care erau în a doua cutie înainte de ultima mutare, înseamnă că aici erau $3\cdot b$ bile și au mai fost aduse ultima dată două treimi din acest număr, adică $2\cdot b$ bile, deci $3b+2b=1125$ și obținem $b=225$. Rezultă că după a doua mutare aveam în a doua cutie $3\cdot 225=675$ bile și în prima $2025-675=1350$ bile 2p

Dacă notăm cu c o treime din numărul de bile care erau în a prima cutie la început, înseamnă că acolo erau $3\cdot c$ bile și la a prima mutare au mai fost aduse două treimi din acest număr, adică $2\cdot c$ bile, deci $3c+2c=1350$ și obținem $c=270$. Rezultă că după prima mutare aveam în a prima cutie $3\cdot 270=810$ bile și în a doua $2025-810=1215$ bile 2p

Deci la început în a doua cutie erau cu 405 bile mai multe decât în prima.. 1p

Clasa a V-a

Problema 1.

$2^{2026}+2^{2025}+2^{2022}=2^{2022}(2^4+2^3+1)$..........1p

$=2^{2022}\cdot\left(\underbrace{16+8+1}_{25}\right)=2^{2022}\cdot 25$..........1p

$=2^{2020}\cdot\underbrace{2^2\cdot 25}_{100}=2^{2020}\cdot 100$..........2p

$U(2^{2020})=U(2^4)=6 =>$..........1p

Ultimele 3 cifre ale lui A sunt 600 deci $(A-600)\ \vdots\ 1000$..........2p

Problema 2.

a) Dacă $n\geq 3$, cum $N+1=\overline{2025\underbrace{00\ldots0}_{n\ cifre\ de\ 0}}$ atunci $N+1$ este multiplu al lui 24, deci restul împărțirii lui N la 24 va fi 23..........1 p

Dacă $n=0$ atunci $N=2024$ și restul este 8, dacă $n=1$ atunci $N=20249$ și restul este 17 iar dacă $n=2,\ N=202499$ iar restul este egal cu 11. ....1 p

b) Se observă că $36^2+9^3=2025$ 2p

$2025^{2023}=2025\cdot 2025^{2022}=(36^2+9^3)\cdot 2025^{2022}=36^2\cdot 2025^{2022}+9^3\cdot 2025^{2022}=$ $(36\cdot 2025^{1011})^2+(9\cdot 2025^{674})^3$..........2p

De aici deducem că $x=36\cdot 2025^{1011}$ $și$ $y=9\cdot 2025^{674}$ 1p

Problema 3.

Notăm $1=d_1<d_2<d_3<\cdots<d_k=n$ unde d_2 este număr prim, iar cei mai mari 3 divizori ai lui n sunt $n, \frac{n}{d_2}, \frac{n}{d_3}$. Avem două cazuri $d_3=d_2^2$ sau d_3 este număr prim. 1p

Dacă $d_3=d_2^2$ atunci $n=d_2^2\cdot m$, iar cei mai mari 3 divizori sunt $d_2^2\cdot m,\ d_2\cdot m, m$ de aici avem $79=m(1+d_2+d_2^2)$. Dar 79 este număr prim deci $m=1$ și $1+d_2+d_2^2=79$. De aici obținem $d_2(d_2+1)=78$. Dar $8\cdot 9=72<78<90=9\cdot 10$ deci nu avem soluții în acest caz..2p

Dacă d_3 este număr prim, atunci $n=d_2\cdot d_3\cdot m$, iar cei mai mari 3 divizori sunt $d_2\cdot d_3\cdot m$, $d_3\cdot m,\ d_2\cdot m$ de aici avem $79=m(d_2+d_3+d_2\cdot d_3)$. 79 este număr prim deci $m=1$ și $d_2+d_3+d_2\cdot d_3=79$ de unde găsim $d_3=\frac{79-d_2}{1+d_2}$ deci $1+d_2 \mid 79-d_2$ adică $1+d_2 \mid 80$.

Deoarece d_2 este număr prim și 80 nu este divizibil cu 3 rezultă că $d_2>2$ este impar, deci $1+d_2$ este par. În plus $79=d_2+d_3+d_2\cdot d_3>d_2^2$ deci $d_2<9$ de unde avem $1+d_2$ poate fi 4 sau 8..........2p

Pentru $1+d_2=4$ avem $d_2=3$ și $d_3=19$ numere prime și $n=57$. 1p

Pentru $1+d_2=8$ avem $d_2=7$ și $d_3=9$ care nu este număr prim..........1p

Clasa a VI-a

Problema 1.

$\frac{5y^2}{2} = \frac{100}{z} \Longrightarrow z = \frac{40}{y^2} \in \mathbb{N}$ şi deci $y \in \{1, 2\}$ 2p

Dacă $y = 2$ atunci $z = 10$, iar din $\frac{73+y+x^3}{20} = \frac{100}{z} = 10 \Longrightarrow x^3 = 125 \Longrightarrow x = 5$......2p

Fracția $\frac{x^2+y^2+z^2}{z-y-x} = 43$ număr prim......1p

Dacă $y = 1$ atunci $z = 40$, iar din $\frac{73+y+x^3}{20} = \frac{100}{z}$ se obține $74 + x^3 = 50$ ecuație care nu are soluții în mulțimea numerelor naturale......2p

Problema 2.

a) Ecuația fiind simetrică în a și b putem presupune fără a restrânge generalitatea că $a \geq b$. Ecuația devine $2024^a - 2024^b = 2025^a - 2025^b$ adică $2024^{\boldsymbol{b}}(2024^{a-b} - 1) = 2025^{\boldsymbol{b}}(2025^{a-b} - 1)$.. 1p

Dacă $a > b \Longrightarrow a - b > 0 \Longrightarrow 2024^{a-b} < 2025^{a-b}$ și $0 \leq 2024^{a-b} - 1 < 2025^{a-b} - 1$ și de aici $2024^{\boldsymbol{b}}(2024^{a-b} - 1) < 2025^{\boldsymbol{b}}(2025^{a-b} - 1)$ deci $a = b$......2p

b) Din punctul a) se obține $9x^2 + y = 3xy + 28$. De aici avem $y(3x - 1) = 9x^2 - 28$, adică $y = \frac{9x^2-28}{3x-1} \in \mathbb{N}$. Deoarece $3x - 1 | 9x^2 - 28$ şi $3x - 1 | 3x - 1$ se obține $3x - 1 | 9x^2 - 3x$ şi de aici $3x - 1 | 3x - 28$, deci $3x - 1 | 27$. 2p

Deoarece x este număr natural $3x - 1 \in \{-1, 1, 3, 9, 27\}$ şi de aici $x = 0$ şi $y = 28$......2p

Problema 3.

a) $\Delta ABM \equiv \Delta ECM (L.U.L) \Longrightarrow \sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle MCE$ 1p

$\Delta ABD \equiv \Delta FBD (C.C) \Longrightarrow \sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle DBF$ deci $\sphericalangle CBP \equiv \sphericalangle BCP \Longrightarrow PB \equiv PC$......1p

b) Deoarece $BC \perp AF, AD \equiv DF$ rezultă că BC este mediatoarea segmentului AF......1p

Din $M \in BC$ avem $AM \equiv FM$. Dar $AM \equiv ME$ deci în triunghiul AFE avem FM mediană și $FM \equiv AM \equiv ME$ deci $\sphericalangle AFE = 90° = \sphericalangle ADM$ şi de aici avem $FE \parallel BC$. 3p

Triunghiul PBC este isoscel de bază BC, PM este mediană deci PM este mediatoarea segmentului BC 1p

Clasa a VII-a

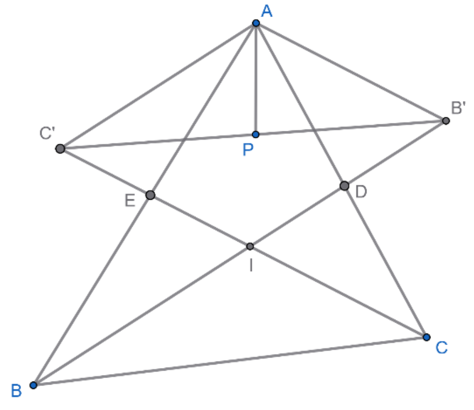
Problema 1.

$x_1 = 0$ este o soluție a ecuației..1p
Dacă $x > 0$ rezultă $0 \le [x] \le x$ și $0 \le \{x\} < 1$, deci $\{x\} \cdot [x] < x < 2025x$ 2p
Dacă $x \le -1$ rezultă $x - 1 < [x] < 0$, echivalent $0 < -[x] < 1 - x$ și, cum $0 \le \{x\} < 1$, avem $-\{x\} \cdot [x] < 1 - x$, de unde $x - 1 < \{x\} \cdot [x] = 2025x$, imposibil pentru $x \le -1$ 2p
Dacă $-1 < x < 0$, atunci $[x] = -1$, $\{x\} = x + 1$, iar ecuația devine $-x - 1 = 2025x$........................1p
$x_2 = -\frac{1}{2026} \in (-1{,}0)$ soluție 1p

Problema 2.

Dacă adunăm cele trei relații obținem $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{2025}$..1p
Fie $z = \max\{x, y, z\}$. Rezultă $\frac{3}{z} \le \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{2025}$, deci $z \ge 2025$..2p
Presupunem că $z > 2025$. Rezultă $\frac{1}{z} < \frac{1}{2025} = 2x - 2y + \frac{1}{z}$, deci $y < x \le z$..1p
Atunci $\frac{3}{y} > \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{2025}$, deci $\frac{1}{y} > \frac{1}{2025} = 2z - 2x + \frac{1}{y}$, de unde $x > z$, fals!..1p
Deducem că $z = 2025$ și $x, y \le 2025$..1p
Atunci $\frac{2}{2025} \le \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{2025}$, avem egalitate, deci $x = y = 2025$..1p

Problema 3.



Considerăm punctul P pe $B'C'$ astfel încât $\sphericalangle PAD = \sphericalangle IB'C'$ și $\sphericalangle PAE = \sphericalangle IC'B'$ (*)..1p
Punctul P poate fi construit, deoarece $\sphericalangle IB'C' + \sphericalangle IC'B' =$
$= 180^o - \sphericalangle B'IC' = 180^o - \sphericalangle BIC = \frac{1}{2}(\sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB) = 60^o = \sphericalangle BAC$..2p
Din relațiile (*) rezultă că patrulaterele $PEC'A$ și $PDB'A$ sunt inscriptibile..1p
Atunci $\sphericalangle PEA = \sphericalangle PC'A = \sphericalangle PB'I$, deci patrulaterul $BEPB'$ este inscriptibil..1p
Analog patrulaterul $CDPC'$ este inscriptibil..1p
Punctul P, situat pe dreapta $B'C'$, aparține cercurilor circumscrise triunghiurilor BEB' și CDC' 1p

Clasa a VIII-a

Problema 1.

a) Egalitatea $\max(a,b) = \min(a,b)$ este echivalentă cu $\frac{a+b+|a-b|}{2} = \frac{a+b-|a-b|}{2}$, deci $|a-b| = 0$, de unde obținem $a = b$..1p

b) Fie $\max(x^3, 3x-2) - \min(x^3, 3x-2) = a \in \mathbb{Z}$. Ecuația devine $2^a + 2^{-a} = 2$......................1p

Adică $2^a + \frac{1}{2^a} = 2$, echivalent $2^{2a} - 2 \cdot 2^a + 1 = 0$, $(2^a - 1)^2 = 0$, deci $a = 0$......................1p

Atunci $\max(x^3, 3x-2) = \min(x^3, 3x-2)$, din a) rezultă $x^3 = 3x - 2$..................................1p

$x^3 - x - 2x + 2 = 0$,$x(x^2-1) - 2(x-1) = 0$...1p

$(x-1)(x^2+x-2) = 0$..1p

$(x-1)^2(x+2) = 0$, deci $x_1 = -2, x_2 = 1$ 1p

Ecuația $x^3 = 3x - 2$ poate fi rezolvată în $\mathbb{Z}$ scriind-o sub forma $x(x^2-3) = -2$, de unde rezultă că x este un divizor al lui 2. Verificând valorile $-2, -1, 1, 2$ găsim $x_1 = -2, x_2 = 1$.

Problema 2.

Din teorema lui Ceva în ΔBCD cu cevienele concurente DM, BR', CS', $\frac{CR`}{R`D} \cdot \frac{DS`}{S`B} \cdot \frac{BM}{MC} = 1$.................1p

Rezultă $\frac{DR`}{R`C} = \frac{DS`}{S`B}$, deci $R'S' \parallel BC$...2p

Din teorema lui Ceva în ΔABC cu cevienele concurente CS, BR, AM, $\frac{AS}{SB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CR}{RA} = 1$........................1p

Rezultă $\frac{AS}{SB} = \frac{AR}{RC}$, de unde $RS \parallel BC$ 2p

Astfel $RS \parallel R'S'$, deci R, S, R' și S' sunt coplanare, așadar dreptele SS' și RR' sunt coplanare.........1p

Problema 3.

Fie $a_1, a_2, \dots, a_{2025}$ lungimile muchiilor celor 2025 de cuburi. Din ipoteză avem $a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_{2025}^3 = 343m^3$, deci, pentru $i \in \overline{1{,}2025}$, $a_i^3 < 343 = 7^3m^3$, și $a_i < 7\ m$..2p

Atunci $a_i^2 < 49\ m^2$, deci $a_i^3 < 49a_i$ pentru orice $i \in \overline{1{,}2025}$ 2p

Sumând relațiile avem $49(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2025}) > 343$, deci $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2025} > 7$.....................1p

Cum fiecare cub are 12 muchii, suma lungimilor tuturor muchiilor acestor cuburi este mai mare decât $12 \cdot 7 = 84m$ 2p

Clasa a IX-a

Problema 1.

Pentru $n = 1$, avem $\frac{a_1}{2} + \frac{1}{a_1 \cdot a_2} = 1$, echivalent cu $\frac{2-a_1}{2} = \frac{1}{a_1 \cdot a_2}$, deci $a_1 \cdot a_2 \cdot (2 - a_1) = 2$ 1p

Termenii șirului sunt numere naturale, deci $a_1 | 2$ și $2 - a_1 \neq 0$ de unde găsim $a_1 = 1$ și $a_2 =$.......2p

Folosim metoda inducției matematice pentru a demonstra că $a_n = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Verificarea este făcută. Presupunem că $a_k = k, \forall k \in \overline{1, n}$ și demonstrăm că $a_{n+1} = n + 1$. Avem $\frac{a_1}{2!} + \frac{a_2}{3!} + \cdots + \frac{a_n}{(n+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$..........2p

Prin urmare, $1 - \frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n+1}} = 1 - \frac{1}{n! \cdot a_{n+1}}$, de unde reiese că $a_{n+1} = n + 1$..................1p

Conform principiului inducției matematice, $a_n = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$..........1p

Problema 2.

Conform principiului cutiei, două dintre numerele $a - 2, b - 2, c - 2$ au același semn (sau sunt egale cu 0). Datorită simetriei, fără a restrânge generalitatea putem considera $(a - 2)(b - 2) \geq 0$..........3p

Atunci $ab + 4 \geq 2a + 2b$, de unde $abc + 4c \geq 2ac + 2bc, (1)$.......... 1p

Pe de altă parte, $c^2 + 4 \geq 4c, (2)$..........1p

respectiv $a^2 + b^2 \geq 2ab, (3)$.......... 1p

Adunând inegalitățile (1), (2), (3) obținem relația cerută..........1p

Problema 3.

Notăm Q mijlocul laturii BC, P mijlocul medianei din A, $\frac{AM}{BM} = x > 0, \frac{AN}{CN} = y > 0$..........1p

Atunci $\overrightarrow{PA} = -\overrightarrow{PQ} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$..........1p

$\overrightarrow{PM} = \frac{1}{1+x}\overrightarrow{PA} + \frac{x}{1+x}\overrightarrow{PB} = \frac{2x-1}{2(1+x)}\overrightarrow{PB} - \frac{1}{2(1+x)}\overrightarrow{PC}$,..........1p

$\overrightarrow{PN} = \frac{1}{1+y}\overrightarrow{PA} + \frac{y}{1+y}\overrightarrow{PC} = -\frac{1}{2(1+y)}\overrightarrow{PB} + \frac{2y-1}{2(1+y)}\overrightarrow{PC}$,..........1p

$P \in MN$ dacă și numai dacă $\overrightarrow{PM} \parallel \overrightarrow{PN}$ 1p

$\overrightarrow{PB}$ și $\overrightarrow{PC}$ sunt nenuli și necoliniari, $\overrightarrow{PM} \parallel \overrightarrow{PN}$ dacă și numai dacă $\frac{2x-1}{2(1+x)} \cdot \frac{(-2)(1+y)}{1} = -\frac{1}{2(1+x)} \frac{2(1+y)}{2y-1}$..........1p

Relația anterioară este echivalentă, prin calcul, cu $x + y = 2xy$.......... ....1p

Clasa a X-a

Problema 1.

a) $AB = |z_A - z_B| = 5$..........1p

b) Notând M punctul de afix z relația $|z-3i| + |z-4| = 5$ se scrie $AM + BM = 5$. Deoarece $AB = 5$ se obține că $M \in (AB)$. Deoarece $|z|$ este minim rezultă că $OM \perp AB$..........3p

Deci $OM = d(O, AB) = \frac{OA \cdot OB}{AB} = 2{,}4$ și $\operatorname{Re} z = \frac{OM^2}{OA} = 1{,}44$ iar și $\operatorname{Im} z = \frac{OM^2}{OB} = 1{,}92$ deci $z = 1{,}44 + 1{,}92\, i$. 3p

Problema 2.

Ecuația este echivalentă cu $\log_2 \frac{x^5+x^3+2}{x^2} - 2 = -(x-1)^2$ adică $\log_2 \frac{x^5+x^3+2}{4x^2} = -(x-1)^2$..........2p

Deoarece $\frac{x^5+x^3+2}{4x^2} = \frac{1}{4}\left(x^3 + x + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)$ aplicând inegalitatea mediilor obținem $\frac{x^5+x^3+2}{4x^2} \geq 1$ și în consecință $\log_2 \frac{x^5+x^3+2}{4x^2} \geq 0$..........3p

Deoarece $-(x-1)^2 \leq 0$ găsim $\log_2 \frac{x^5+x^3+2}{4x^2} = 0 = -(x-1)^2$, deci unica soluție este $x = 1$.......2p

Problema 3.

Înlocuind $x = 2$ în relația $f(x^3) = (f(x))^3$ obținem $(f(2))^3 = f(8) = f(4) = f(2) \in (0, \infty)$. Deci $f(2) = 1$. Se deduce că $f(2^n) = f(2) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, deci $f(2^{2025}) = 1$..........2p

Definim funcția $g : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, prin $g(x) = f(2^x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Avem că $g(x+1) = f(2^{x+1}) = f(2 \cdot 2^x) = f(2^x) = g(x)$ și $g(3x) = f(2^{3x}) = (f(2^x))^3 = (g(x))^3, \forall\, x \in (0, \infty)$...........2p

Se obține că $f\left(\sqrt[2025]{2}\right) = g\left(\frac{1}{2025}\right)$ și $\left(g\left(\frac{1}{2025}\right)\right)^{81} = g\left(\frac{81}{2025}\right) = g\left(\frac{1}{25}\right)$. Deoarece $\varphi(25) = 20$ și $(3, 25) = 1$, avem că $3^{20} \equiv 1\ (mod\ 25)$, deci $\frac{3^{20}-1}{25} = k \in \mathbb{N}$ şi $g\left(\frac{1}{25}\right) = g\left(\frac{1}{25} + k\right) = g\left(\frac{3^{20}}{25}\right) = g^{3^{20}}\left(\frac{1}{25}\right)$. De aici se obține $g\left(\frac{1}{25}\right) = 1$ deci $g\left(\frac{1}{2025}\right) = 1$. 2p

Deci $f(2^{2025}) - f\left(\sqrt[2025]{2}\right) = 0$..........1p

Clasa a XI-a

Problema 1.

Pentru $x \leftarrow 3x$ în relația din ipoteză, obținem că $f(3x)f(9x)f(27x) = 3^{39x} > 0$ și $f(x) \neq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, de unde avem că $\frac{f(3^3x)}{f(x)} = 3^{26x} > 0, (\forall)x \in \mathbb{R}$ și deci $f(3^3x)$ și $f(x)$ au același semn pentru orice $x \in \mathbb{R}$. 1p

Prin inducție matematică obținem că $f(3^{3n}x)$ și $f(x)$ au același semn pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și orice $n \in \mathbb{N}^*$, iar pentru $x \leftarrow 3^{-3n}x$ avem că $f(3^{-3n}x)$ și $f(x)$ au același semn pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și orice $n \in \mathbb{N}^*$. 1p

Presupunem că există $x_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x_0) < 0 \Rightarrow f(3^{-3n}x) < 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ (1)

Din relația din ipoteză avem că nu toate valorile $f(x_0), f(3x_0), f(9x_0)$ pot fi negative. Fie $f(3x_0) > 0$.

(Cazul în care $f(9x_0) > 0$ se tratează analog). Atunci și $f(3^{-3n+1}x) > 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ (2)

Deoarece f este continuă în punctul $x_0 = 0$, din relațiile (1) și (2) avem că $\lim_{n\to\infty} f(3^{-3n}x) = \lim_{n\to\infty} f(3^{-3n+1}x) = f(0)$, însă $\lim_{n\to\infty} f(3^{-3n}x) \leq 0$ și $\lim_{n\to\infty} f(3^{-3n+1}x) \geq 0 \Rightarrow f(0) = 0$ ceea ce este fals. Deci, $f(x) > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. 2p

Fie funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = \log_3 f(x) - x \Rightarrow g$ este continuă în $x_0 = 0, g(0) = 0$ 1p

Deoarece $f(3^3x) = 3^{26x}f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R} \Rightarrow g(3^3x) = g(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și prin inducție matematică obținem că $g(3^{-3n}x) = g(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și orice $n \in \mathbb{N}^*$. 1p

Deoarece g este continuă în $x_0 = 0 \Rightarrow g(x) = \lim_{n\to\infty} g(3^{-3n}x) = g(0) = 0$ și deci, $f(x) = 3^x$. 1p

Problema 2.

Fie șirul $a_n = \prod_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{k}{n^2} + \cos\frac{\sqrt{k}}{n}\right), n \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow a_n = e^{\ln\prod_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{k}{n^2}+\cos\frac{\sqrt{k}}{n}\right)}$

$\Longrightarrow a_n = e^{\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\sin\frac{k}{n^2}+\cos\frac{\sqrt{k}}{n}\right)}$. 1p

Considerăm funcția $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln(\sin x + \cos\sqrt{x}) \Longrightarrow$

$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{\ln(\sin x+\cos\sqrt{x})}{x} = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{\frac{\ln(\sin x+\cos\sqrt{x})}{\sin x+\cos\sqrt{x}-1}\cdot(\sin x+\cos\sqrt{x}-1)}{x} = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{\sin x+\cos\sqrt{x}-1}{x} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. .2p

Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$, există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încît pentru orice $x \in (0, \delta_\varepsilon)$ să avem $\left|\frac{f(x)}{x} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon \Longrightarrow (\frac{1}{2} - \varepsilon)x < f(x) < (\frac{1}{2} + \varepsilon)x$ (1)

Deoarece $\frac{1}{n} \to 0$, există $n_\varepsilon \geq 1$ astfel încît $0 < \frac{1}{n} < \delta_\varepsilon$, oricare ar fi $n \geq n_\varepsilon$.

Pentru orice $n \geq n_\varepsilon$, avem $0 < \frac{k}{n^2} < \frac{1}{n} < \delta_\varepsilon$ pentru orice $k = \overline{1,n}$. 1p

Folosind relația (1) pentru $x = \frac{k}{n^2}$, obținem că $(\frac{1}{2} - \varepsilon)\frac{k}{n^2} < f(\frac{k}{n^2}) < (\frac{1}{2} + \varepsilon)\frac{k}{n^2} \Longrightarrow (\frac{1}{2} - \varepsilon)\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} < \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2}) < (\frac{1}{2} + \varepsilon)\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} \Longrightarrow \left|\frac{\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2})}{\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2})}{\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}} = \frac{1}{2}$. 2p

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$, obținem că $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{1}{4}$. Deci, $\lim_{n\to\infty} a_n = e^{\frac{1}{4}}$. 1p

Problema 3.

Fie $C = AB - BA$. Avem că $C^2 = C \cdot C^* = \det(C) \cdot I_{2n+1} \Longrightarrow (\det C)^2 = (\det C)^{2n+1}$ 1p

Dacă $\det C \neq 0 \Longrightarrow (\det C)^{2n-1} = 1$ și cum $\det C \in \mathbb{R} \Longrightarrow \det C = 1 \Longrightarrow C^2 = I_{2n+1}$ de unde rezultă că valorile proprii ale matricei C verifică relația $\lambda^2 = 1$, deci pot fi 1 sau -1. .... 2p

Deducem că $tr(C)$ este număr impar, ceea ce este fals deoarece $trC = tr(AB - BA) = 0$. Deci, $\det C = 0$. ....,,,,,................................ 1p

$\det C = 0 \Longrightarrow rang(C) \leq 2n$.

Dacă $rang(C) = 2n$, atunci din relația Sylvester avem că $0 = rang(C \cdot C^*) \geq rang(C) + rang(C^*) - 2n - 1 \Longrightarrow rang(C^*) \leq 1$.

Dacă $rang(C) \leq 2n - 1$, atunci toți minorii de ordinul $2n$ ai matricei C sunt nuli și deci, $C^* = O_{2n+1} \Longrightarrow rang(C^*) = 0$. 2p

Deci $rang(C^*) \leq 1 \Longrightarrow rang(C) \leq 1 \Longrightarrow$ toți minorii de ordinul $2n$ ai matricei C sunt nuli și deci, $C = O_{2n+1} \Longrightarrow AB = BA$. 1p