CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

CLASA A X-a

Problema 1. Determinaţi numerele $a, b, c \in \mathbb{C}^*$ pentru care

$$|a\bar{b} + b\bar{c} + c\bar{a}| = |a|^2 + |b|^2 + |c|^2.$$

Mihai Opincariu

Soluţie. Din inegalitatea modulului şi din identitatea $|z| = |\bar{z}|$ avem $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = |a\bar{b} + b\bar{c} + c\bar{a}| \leqslant |a\bar{b}| + |b\bar{c}| + |c\bar{a}| = |a||b| + |b||c| + |c||a|$, de unde se obţine $|a| = |b| = |c|$ (1).

Fie $z_1 = a\bar{b}, z_2 = b\bar{c}$ şi $z_3 = c\bar{a}$. Folosind (1) avem, $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1| + |z_2| + |z_3|$. Aceasta implică faptul că numerele complexe z_1, z_2, z_3 au acelaşi argument şi, având şi acelaşi modul, obţinem că $z_1 = z_2 = z_3$.

Atunci $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} = \frac{a+b+c}{b+c+a} = 1$, deci $a = b = c$. Reciproc, observăm ca orice triplet de numere complexe nenule egale verifică relaţia dată.

□

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

Problema 2. Fie $n \geqslant 2$ şi funcţiile $f, g : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încât

$$g(k) = \text{card}\{i \in \{1, 2, \ldots, n\} | f(i) \leqslant f(k)\},$$

pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

a) Arătaţi că f este bijectivă dacă şi numai dacă g este bijectivă.

b) Dacă g este o funcţie dată, determinaţi, în funcţie de g, numărul de funcţii f care verifică proprietatea dată.

Silviu Cristea

Soluţie. a) Dacă f este bijectivă, $\text{card}\{i \in \{1, 2, \ldots, n\} | f(i) \leqslant f(k)\} = f(k)$, pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, de unde deducem că $g = f$. În particular şi g este bijectivă.

Dacă g este bijectivă, observăm că f trebuie să fie injectivă. Într-adevăr, dacă $f(k) = f(p)$, atunci $g(k) = g(p)$, deci $k = p$. Cum f mapează injectiv elementele unei mulţimi finite în aceeaşi mulţime, ea este bijectivă.

b) Din definiţia lui g observăm că $g(k) = g(p)$ dacă şi numai dacă $f(k) = f(p)$. Într-adevăr, dacă $f(k) = f(p)$, atunci este imediat că $g(k) = g(p)$. Reciproc, dacă $g(k) = g(p)$, atunci $\text{card}\{x \in Im(f) | x \leqslant f(k)\} = \text{card}\{x \in Im(f) | x \leqslant f(p)\}$, iar cum $f(k), f(p) \in Im(f)$, avem $f(k) = f(p)$. Atunci card $Im(f) =$ card $Im(g)$.

Fie $Im(g) = \{g_1 < g_2 < \ldots < g_t\}$. Pentru orice $A \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ cu $|A| = t$, există o unică funcţie f care verifică. Într-adevăr, dacă $A = \{a_1 < a_2 < \ldots < a_t\}$, atunci trebuie să avem $f^{-1}(a_k) = g^{-1}(g_k)$, pentru orice $k = 1, \ldots, t$.

Atunci, pentru g fixată, numărul de funcţii f care verifică este $C_n^{|Im(g)|}$.

$\square$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

Problema 3. Fie $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ o funcţie cu proprietatea că

$$f(x + f(y)) = f(x + y) + f(y), \text{ pentru orice } x, y > 0.$$

a) Arătaţi că $f(x) > x$, pentru orice $x > 0$.
b) Arătaţi că $g : (0,\infty) \to (0,\infty)$ definită prin $g(x) = f(x) - x$, este injectivă.
c) Determinaţi toate funcţiile f cu proprietatea dată.

Olimpiadă Tailanda

Soluţie. a) Dacă există $y \in (0,\infty)$ astfel încât $f(y) = y$, înlocuind în relaţia din ipoteză, obţinem $y = 0$, ceea ce este imposibil.

Dacă $f(x) < x$ pentru un $x \in (0,\infty)$, atunci avem $f(x) = f((x - f(x)) + f(x)) = f(2x - f(x)) + f(x)$, deci $f(2x - f(x)) = 0$, fals. Atunci, avem că $f(x) > x$ pentru orice $x > 0$.

b) Relaţia dată se rescrie $g(t + g(y)) = g(t) + y$, pentru orice $t > y > 0$ (1). De aici, fixând pe t, deducem că g este injectivă (2).

c) Mai departe, $g(t+g(x)+g(y)) = g(t+g(x))+y = g(t)+x+y = g(t+g(x+y))$, pentru orice $x, y > 0$ şi $t > x, y$. Din (2) deducem atunci că $g(x+y) = g(x)+g(y)$, pentru orice $x, y > 0$ (3).

Din (1) şi (3) rezultă $g(g(y)) = y$, pentru orice $y > 0$.

Relaţia (3) implică faptul că g este strict crescătoare. Atunci, dacă $g(x) > x$, atunci $g(g(x)) > g(x) > x$, contradicţie. Analog $g(x) < x$ duce la o contradicţie.

Am obţinut că $g(x) = x$ şi $f(x) = 2x$, pentru orice $x > 0$. Funcţia $f(x) = 2x$ îndeplineşte condiţiile problemei.

$\square$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ŢIŢEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

Problema 4. O cetate aflată în riscul de a fi atacată îşi stabileşte turnuri de apărare, pe care le reprezentăm ca $n \geqslant 3$ puncte în plan, astfel încât oricare trei dintre ele nu sunt coliniare. Orice poligon convex având vârfurile printre aceste puncte este numit bază. În fiecare turn de apărare se află câte un soldat. Pentru fiecare bază, statul plateşte câte $k \cdot 2^k$ monede fiecărui soldat aflat în turnurile de pe frontiera bazei, unde k este numărul de soldaţi aflaţi în interiorul (şi nu pe frontierele) bazei. Arătaţi că statul poate plăti soldaţii dintr-un buget de $n(n+1) \cdot 2^{n-3}$ monede, indiferent de localizarea celor n turnuri de apărare.

Cristi Săvescu

Soluţie. Fie A mulţimea celor n puncte în care sunt turnurile. Fie $t \in \{3, 4, \ldots, n\}$ fixat şi $T \subseteq A$ o submulţime de cardinal t. Atunci T se scrie în mod unic sub forma $T = P \cup Q$, unde P este muţimea punctelor din T care se află pe frontiera înfăşurătoarei convexe a lui T iar Q sunt punctele din T care se află în interiorul acesteia.

Atunci, dacă statul plăteşte 2 monede fiecărui soldat din P pentru fiecare soldat din Q, arătăm ulterior că atunci când parcurgem toate submulţimile $T \subseteq A$ cu $|T| \geqslant 3$, plăţile sunt conforme cu ipoteza. Atunci, pentru T, statul plateşte în total $2 \cdot |P| \cdot |Q| \leqslant 2 \cdot \left(\dfrac{|P|+|Q|}{2}\right)^2 = \dfrac{t^2}{2}$ monede.

Într-adevăr, pentru mulţimile T pentru care P este înfăşurătoarea convexă, se vor plăti câte 2 monede fiecărui soldat de pe P atunci când numărăm câte un soldat din interiorul lui P. Fiecare soldat s din interiorul lui P este numărat însă în toate submulţimile de puncte interioare de forma $\{s\} \cup R$, unde $R \subseteq Int(P) \setminus \{s\}$, adică de $2^{|Int(P)-1|}$ ori. Aşadar, fiecare soldat de pe frontieră va primi $2^{|Int(P)|}$ monede pentru s, deci în total $|Int(P)| \cdot 2^{|Int(P)|}$ monede.

Suma plătită de stat este $S \leqslant \displaystyle\sum_{t=3}^{n} \sum_{\substack{T \subseteq A \\ |T|=t}} \frac{t^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=3}^{n} C_n^k \cdot k^2 < \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot k^2$.

Dar $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot k^2 = n(n+1) \cdot 2^{n-2}$, de unde rezultă concluzia.

$\square$