CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 1, Craiova, 23 martie 2024

CLASA A VII-A

Problema 1. Fie m, n, p trei numere naturale nenule şi considerăm numerele $m' = (m, np)$, $n' = (n, mp)$ şi $p' = (p, mn)$, unde (a, b) este cel mai mare divizor comun al numerelor a şi b. Să se arate că ecuaţia $x^m + y^n = z^p$ are soluţii în mulţimea numerelor naturale nenule dacă şi numai dacă ecuaţia $x^{m'} + y^{n'} = z^{p'}$ are soluţii în mulţimea numerelor naturale nenule.

Luminiţa Popescu
Craiova

Barem de corectare. Implicaţia directă este simplă. Într-adevăr dacă (a, b, c) este o soluţie a ecuaţiei $x^m + y^n = z^p$, atunci $x = a^{\frac{m}{m'}}$, $y = b^{\frac{n}{n'}}$, $z = c^{\frac{p}{p'}}$ este o soluţie a ecuaţiei $x^{m'} + y^{n'} = z^{p'}$.
Fie acum (a, b, c) o soluţie a ecuaţiei $x^{m'} + y^{n'} = z^{p'}$. Înmulţind egalitatea

$$a^{m'} + b^{n'} = c^{p'}$$

cu $a^{unp}b^{vmp}c^{wmn}$, unde u, v, w sunt numere naturale, obţinem:

$$a^{m'+unp}b^{vmp}c^{wmn} + b^{n'+vmp}a^{unp}c^{wmn} = c^{p'+wmn}a^{unp}b^{vmp} \tag{1}$$

Dacă găsim numerele naturale u, v, w astfel încât $m' + unp \equiv 0 \pmod m$, $n' + vmp \equiv 0 \pmod n$ şi $p' + wmn \equiv 0 \pmod p$, atunci egalitatea (1) devine

$$\left(a^{\frac{m'+unp}{m}}b^{vp}c^{wn}\right)^m + \left(b^{\frac{n'+vmp}{n}}a^{up}c^{wm}\right)^n = \left(c^{\frac{p'+wmn}{p}}a^{un}b^{vm}\right)^p;$$

cu alte cuvinte ecuaţia $x^m + y^n = z^p$ are soluţii în mulţimea numerelor naturale nenule.
Prin împărţire la m' congruenţa $m' + unp \equiv 0 \pmod m$ este echivalentă cu

$$1 + u \cdot \frac{np}{m'} \equiv 0 \pmod{\frac{m}{m'}}. \tag{2}$$

Cum $m' = (m, np)$, deducem că $(\frac{m}{m'}, \frac{np}{m'}) = 1$ deci congruenţa (2) are soluţii. Acelaşi argument merge şi pentru celelalte două congruenţe, ceea ce încheie demonstraţia.

$\square$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 1, Craiova, 23 martie 2024

Problema 2. Să se arate că numărul:

$$\left\lfloor \frac{2024}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2023}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2022}{3} \right\rfloor + ... + \left\lfloor \frac{1013}{1012} \right\rfloor ,$$

este par, unde $\lfloor x \rfloor$ reprezintă partea întreagă a numărului x.

***

Barem de corectare. Avem că:

$$\begin{aligned}\left\lfloor \frac{2024}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2023}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2022}{3} \right\rfloor + ... + \left\lfloor \frac{1013}{1012} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{2025}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2025}{2} \right\rfloor + ... + \left\lfloor \frac{2025}{1012} \right\rfloor - 1012 \\ &= \left\lfloor \frac{2025}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2025}{2} \right\rfloor + ... + \left\lfloor \frac{2025}{2025} \right\rfloor - 2025\end{aligned}$$

Rămâne să arătăm că $N := \left\lfloor \frac{2025}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2025}{2} \right\rfloor + ... + \left\lfloor \frac{2025}{2025} \right\rfloor$ este impar.
Pentru fiecare $1 \leq i \leq 2025$, fie M_i mulţimea multiplilor nenuli ai lui i, mai mici sau egali cu 2025. Atunci cardinalul lui M_i este egal cu $\left\lfloor \frac{2025}{i} \right\rfloor$.
Se observă că fiecare număr $1 \leq n \leq 2025$ apare în exact $\tau(n)$ dintre mulţimile $M_1, M_2, ..., M_{2025}$, unde $\tau(n)$ este numărul divizorilor lui n.
Ştim că numerele $\tau(n)$ sunt pare, cu excepţia pătratelor perfecte, deci $\tau(n)$ este par cu excepţia numerelor $1^2, 2^2, ..., 45^2$.
Cum N este suma cardinalelor mulţimilor $M_1, M_2, ..., M_{2025}$, înseamnă că N este cardinalul reuniunii disjuncte a acestor mulţimi. În plus, fiecare element n din reuniunea $M_1 \cup M_2 \cup ... \cup M_{2025} = \{1, 2, ..., 2025\}$ apare în reuniunea disjunctă de $\tau(n)$ ori, astfel că:

$$N = \tau(1) + \tau(2) + ... + \tau(2025).$$

Aplicând observaţia anterioară, N are aceeaşi paritate ca şi 45, deci este impar.

$\square$

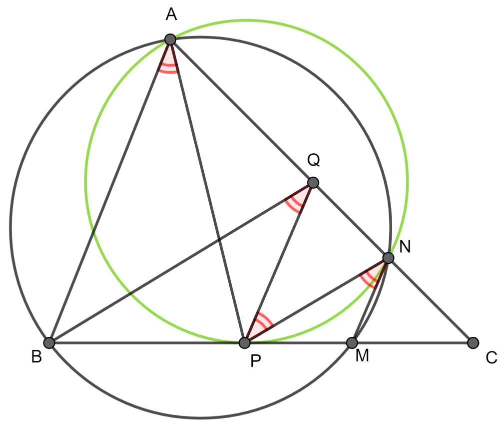
CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 1, Craiova, 23 martie 2024

Problema 3. Fie M un punct pe segmentul BC al triunghiului ABC. Cercul circumscris triunghiului ABM intersectează segmentul AC într-un punct N diferit de A. Se construieşte cercul ce trece prin punctele A, N şi este tangent la segmentul BC în P. Să se arate că $\measuredangle BAP \equiv \measuredangle PNM$.

***

Barem de corectare. Folosind puterea punctului C faţă de cercul tangent la segmentul BC avem că: $CP^2 = CN \cdot CA$. Pe de altă parte, puterea punctului C faţă de cercul circumscris triunghiului ABM ne dă: $CN \cdot CA = CM \cdot CB$. Din cele două egalităţi se obţine: $CP^2 = CM \cdot CB$ (1).



Construim paralela PQ la MN, unde Q aparţine segmentului AN. Din paralelism deducem că $\measuredangle PNM \equiv \measuredangle QPN$ (2).

În plus, obţinem şi că $\dfrac{CN}{CQ} = \dfrac{CM}{CP}$. Egalitatea (1) se rescrie sub forma $\dfrac{CM}{CP} = \dfrac{CP}{CB}$, astfel că $\dfrac{CN}{CQ} = \dfrac{CP}{CB}$. Am obţinut că $PN \parallel BQ$.

Din $PN \parallel BQ$ se deduce că $\measuredangle QPN \equiv \measuredangle BQP$, care împreună cu (2) ne dă că $\measuredangle PNM \equiv \measuredangle BQP$.

Pentru a încheia demonstraţia, rămâne să arătăm că $\measuredangle BAP \equiv \measuredangle BQP$. Pentru aceasta este suficient să observăm că patrulaterul $ABPQ$ este inscriptibil. Din $PQ \parallel NM$ avem că $\measuredangle AQP \equiv \measuredangle ANM$. În plus, $\measuredangle ABC + \measuredangle ANM = 180^\circ$ pentru că $ABMN$ este inscriptibil. Se obţine că $\measuredangle ABC + \measuredangle AQP = 180^\circ$, adică patrulaterul $ABPQ$ este inscriptibil.

$\square$

Problema 4. Pentru mulţimea M formată din $n \geqslant 3$ puncte din plan numim *drum* o linie frântă $A_1A_2\ldots A_n$, cu proprietatea că $M = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ şi definim lungimea lui ca fiind suma $A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n$. Spunem despre mulţimea M că este drum-unicată dacă orice două drumuri distincte au lungimi distincte şi că este segment-unicată dacă orice două segmente nedegenerate distincte cu capetele în puncte din M au lungimi distincte. Determinaţi numerele naturale $n \geqslant 3$ în fiecare dintre cazurile:
a) orice mulţime M de n puncte din plan segment-unicată este drum-unicată.
b) orice mulţime M de n puncte din plan drum-unicată este segment-unicată.

(liniile frânte nu sunt orientate, astfel că $A_1A_2\ldots A_n$ este aceeaşi cu $A_nA_{n-1}\ldots A_1$)

Cristi Săvescu
Cluj-Napoca

Barem de corectare. a) Dacă $n = 3$, atunci fie $M = \{A, B, C\}$, astfel că segmentele nedegenerate posibile cu capetele în M sunt AB, BC şi CA. Drumurile vor avea lungimile $AB + BC$, $BC + CA$ şi $CA + AB$, iar din faptul că AB, BC, CA sunt distincte ne rezultă că şi drumurile au lungimi distincte.

Aşadar, $n = 3$ verifică. .... **1 punct**

Pentru $n = 4$, considerăm de exemplu mulţimea M formată din punctele A, B, C, D cu A, B, C coliniare (în această ordine) cu $AB = 1$, $BC = 3$, iar D pe perpendiculara în A pe AC cu $AD = 2$. Atunci, $AB = 1$, $BC = 3$, $AC = 4$, $AD = 2$, $BD = \sqrt{5}$, $CD = 2\sqrt{5}$, iar drumurile $DBAC$ si $ADBC$ au lungimi egale: $DB + BA + AC = 5 + \sqrt{5}$ şi $AD + DB + BC = 5 + \sqrt{5}$.

Aşadar, $n = 4$ nu verifică.

Pentru orice $n \geqslant 5$, adaugăm inductiv configuraţiei pentru $n-1$ puncte un punct nou care să nu fie situat pe nicio mediatoare a segmentelor determinate de cele $n-1$ puncte (procesul inductiv începe cu configuraţia de mai sus pentru $n = 4$). Atunci acesta nu va fi egal depărtat de două puncte din configuraţia precedentă, deci noua configuraţie este segment-unicată. Drumurile $DBACX_1X_2\ldots X_{n-4}$ şi $ADBCX_1X_2\ldots X_{n-4}$ sunt distincte, dar de lungimi egale, deci configuraţia nu este drum unicată.

Aşadar, niciun $n \geqslant 5$ nu verifică.

Concluzionăm că doar $n = 3$ verifică.

b) Pentru $n = 3$, fie $M = \{A, B, C\}$. Presupunem că două segmente nedegenerate distincte cu capetele în M ar avea lungimi egale, de exemplu $AB = AC$. Atunci drumurile BCA şi CBA au lungimi egale, ceea ce reprezintă o contradicţie.

Aşadar, $n = 3$ verifică.

Dacă $n = 4$, fie $M = \{A, B, C, D\}$. Analog cu cazul precendent, dacă $AB = AC$, atunci drumurile $BCAD$ şi $CBAD$ au lungimi egale, ceea ce contrazice ipoteza. Dacă avem $AB = CD$, atunci drumurile $CBAD$ şi $ADCB$ au lungimi egale; am obţinut din nou o contradicţie.

Aşadar, $n = 4$ verifică.

Dacă $n \geqslant 5$, atunci scriem pe M ca reuniunea disjunctă $M = \{A, B, C, D\} \cup L$, unde $L \cap \{A, B, C, D\} = \emptyset$. Fie ℓ un drum oarecare pentru L. Analog cu cazul precendent, dacă $AB = AC$, considerăm drumurile $BCAD\ell$ şi $CBAD\ell$ care au lungimi egale. Dacă $AB = CD$, atunci drumurile $CBA\ell D$ şi $A\ell DCB$ au lungimi egale.

Aşadar, orice $n \geqslant 5$ verifică.

În concluzie, orice $n \geqslant 3$ este o soluţie.

$\square$

CLASA A VIII-a

Problema 1. Fie $E(x,y) = \dfrac{(1+x)(1+y)(1+xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}$. Determinaţi:

a) cea mai mare valoare pe care o poate lua $E(x,y)$ când $x, y \in \mathbb{R}$;

Olimpiadă Ucraina

b) cea mai mică valoare pe care o poate lua $E(x,y)$ când $x, y \in \mathbb{R}$.

Dorel Miheţ
Timişoara

Barem de corectare. a) Folosind inegalitatea lui Cauchy-Buniakowski, inegalitatea mediilor sau formarea de pătrate se demonstrează că

$$(1+xy)^2 \leq (1+x^2)(1+y^2) \qquad (1),$$

oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.
(De exemplu, folosind C-B-S, $(1+x)^2 = (1\cdot 1 + 1\cdot x)^2 \leq (1+1)(1+x^2) = 2(1+x^2)$).
Similar putem demonstra inegalităţile:

$$(1+x)^2 \leq 2(1+x^2) \qquad (2)$$

şi

$$(1+y)^2 \leq 2(1+y^2) \qquad (3)$$

Înmulţind membru cu membru inegalităţile (1) – (3) se obţine inegalitatea $E(x,y)^2 \leq 4$, deci $E(x,y) \leq 2$.

Cum $E(1,1) = 2$, cea mai mare valoare pe care o poate lua $E(x,y)$ este 2.

b) Vom demonstra că $E(x,y) \geq -\frac{1}{4}$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.
Într-adevar, inegalitatea este echivalentă cu

$$[2(1+xy)]^2 + 4(1+xy)(x+y) + (x+y)^2 - 2xy + 1 + x^2y^2 \geq 0,$$

adică

$$[2(1+xy) + x + y]^2 + (1-xy)^2 \geq 0,$$

ultima inegalitate fiind evident adevărată.
Egalitatea se obţine dacă cele două pătrate sunt nule. Aceste condiţii conduc la $xy = 1$ şi $x + y = -4$, adică $x = -2 \pm \sqrt{3}$ şi $y = -2 \mp \sqrt{3}$. Se observa că pentru aceste valori $E(x,y) = -\frac{1}{4}$.

□

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 1, Craiova, 23 martie 2024

Problema 2. Fie $ABCD$ un tetraedru pentru care $BA \perp AC$, $DB \perp (BAC)$ şi $AC \neq BD$. Notăm cu O mijlocul segmentului AB şi K piciorul perpendicularei din O pe DC. Demonstraţi că

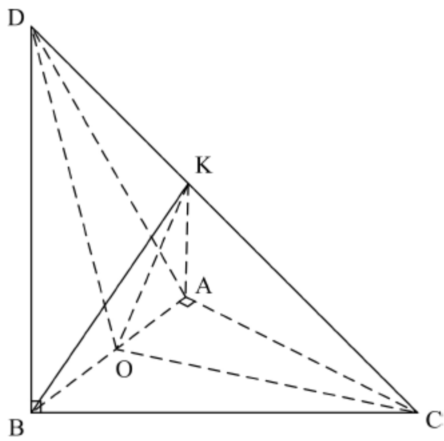
$$\frac{V_{KOAC}}{V_{KOBD}} = \frac{AC}{BD}$$

dacă şi numai dacă

$$2AC \cdot BD = AB^2.$$

Olimpiadă Vietnam

Barem de corectare. Deoarece DO şi CO sunt mediane în triunghiurile DBA, respectiv CBA, avem că $\frac{[OAC]}{[OBD]} = \frac{[ABC]}{[ADB]}$, unde am folosit paranteze drepte pentru a nota aria triunghiurilor respective.



Să observăm că

$$\frac{V_{KOAC}}{V_{KOBD}} = \frac{[OAC] \cdot d(K,(OAC))}{[OBD] \cdot d(K,(OAD))} = \frac{[ABC] \cdot d(K,(ABC))}{[ABD] \cdot d(K,(ADB))} = \frac{V_{KABC}}{V_{KABD}} = \frac{d(C,(KAB)}{d(D,(KAB))}.$$

Folosind asemănarea triunghiurilor, se arată că ultimul raport este egal cu $\frac{KC}{KD}$, deci

$$\frac{V_{KOAC}}{V_{KOBD}} = \frac{KC}{KD}.$$

Evident

$$KC + KD = CD \tag{1}$$

Folosind teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice OKC şi OKD aflăm $KC^2 - KD^2 = OC^2 - OD^2$, de unde

$$KC - KD = \frac{OC^2 - OD^2}{CD} \tag{2}$$

Acum folosind teorema lui Pitagora în triunghiurile OAC şi OBD, se observă

$$OC^2 - OD^2 = AC^2 - BD^2 \tag{3}$$

Din (1), (2) şi (3) deducem

$$\begin{cases} KC = \frac{1}{2}\left(CD - \frac{BD^2 - AC^2}{CD}\right) \\ KD = \frac{1}{2}\left(CD + \frac{BD^2 - AC^2}{CD}\right) \end{cases},$$

şi deci

$$\frac{V_{KOAC}}{V_{KOBD}} = \frac{KC}{KD} = \frac{CD^2 - BD^2 + AC^2}{CD^2 + BD^2 - AC^2} = \frac{2AC^2 + AB^2}{2BD^2 + AB^2}. \tag{4}$$

Pentru ultima egalitate am folosit teorema lui Pitagora în triunghiul BCD. Din (4), observăm că

$$\frac{V_{KOAC}}{V_{KOBD}} = \frac{AC}{BD}$$

dacă şi numai dacă

$$BD(2AC^2 + AB^2) = AC(2BD^2 + AB^2).$$

Ultima egalitate este echivalentă cu

$$(AC - BD) \cdot (2AC \cdot BD - AB^2) = 0$$

şi ţinând cont de $AC \neq BD$, rezultă concluzia.

□

Problema 3. Se ştie că există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât numărul $\overline{3\underbrace{a\ldots a}_{k \text{ de } a}20943}$ este prim.

Aflaţi cifra a.

Dorel Mihet
Timişoara

Barem de corectare. Deoarece $n := \overline{3\underbrace{a\ldots a}_{k \text{ de } a}20943}$ nu se divide cu 3, cifra a este diferită de 0, 3, 6, 9, deci poate fi doar 1, 2, 4, 5, 7, 8.
Fie $a_k := \overline{3\underbrace{a\ldots a}_{k}20943}$, $k = 0, 1, \ldots$.
Să observăm că $a_0 = 320943 = 3 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 31$.
Diferenţa dintre a_{k+1} şi a_k este $\overline{3\underbrace{a\ldots a}_{k+1}20943} - \overline{3\underbrace{a\ldots a}_{k}20943} = (\overline{3a} - 3) \cdot 10^{k+5}$,
deci

$$a_{k+1} - a_0 = (a_{k+1} - a_k) + (a_k - a_{k-1}) + \ldots + (a_2 - a_1) + (a_1 - a_0) =$$
$$= (\overline{3a} - 3)(10^{k+5} + 10^{k+4} + \ldots + 10^5).$$

Rezultă că

$$a_{k+1} = (\overline{3a} - 3)(10^{k+5} + 10^{k+4} + \ldots + 10^5) + 329043 = (\overline{3a} - 3) \cdot A + 3 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 31,$$

unde $A = 10^{k+5} + 10^{k+4} + \ldots + 10^5$.

Dacă $a = 1$, atunci $\overline{3a} - 3 = 28$ se divide cu 7, deci a_{k+1} se divide cu 7 oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$.
Dacă $a = 2$, atunci $\overline{3a} - 3 = 29$, deci a_{k+1} se divide cu 29 oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$.
Dacă $a = 4$ atunci $\overline{3a} - 3 = 31$, deci a_{k+1} se divide cu 31 oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$.
Dacă $a = 7$ atunci $\overline{3a} - 3 = 34$ se divide cu 17, deci a_{k+1} se divide cu 17 oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$.
Dacă $a = 8$ atunci $\overline{3a} - 3 = 35$ se divide cu 7, deci a_{k+1} se divide cu 7 oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$.
Aşadar pentru $a \neq 5$ numerele $\overline{3\underbrace{aa\ldots a}_{k}20943}$ sunt compuse oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$.
Ştim din ipoteză că există cifre a pentru care a_k este prim, deci $a = 5$.

Observaţie. Numărul $35555555 20943$ (7 cifre de 5) este cel mai mic număr prim de această formă. $\square$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 1, Craiova, 23 martie 2024

Problema 4. Spunem că un număr natural n este „joli" dacă este medie aritmetică a două sau mai multor puteri (nu neapărat distincte) ale numărului 2 şi "superjoli" dacă este medie aritmetică a două sau mai multor puteri distincte ale numărului 2.

De exemplu numerele 7 şi 92 sunt superjoli, pentru că $7 = \dfrac{2^4+2^2+1}{3}$, $92 = \dfrac{2^8+2^4+2^2}{3}$.

a) Demonstraţi că orice număr natural nenul este joli.

b) Demonstraţi că nicio putere a lui 2 nu este superjoli.

c) Aflaţi cel mai mic număr natural nenul, diferit de o putere a lui 2, care nu este superjoli.

Olimpiadă Franţa

Barem de corectare. a) Numărul 1 este, în mod evident, joli.
Fie $n > 1$ un număr natural oarecare. El se află între două puteri consecutive ale lui 2, adică există unic $k \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că $2^k \leq n \leq 2^{k+1}-1$. Dacă $n = 2^k + s (0 \leq s \leq 2^k - 1)$, atunci n se poate scrie ca o suma de 2^k puteri ale lui 2, după cum urmează:

$$n = \underbrace{2+2+\ldots+2}_{s \text{ termeni}} + \underbrace{1+1+\ldots+1}_{2^k - s \text{ termeni}}$$

şi atunci

$$n = \frac{1}{2^k}\left(\underbrace{2^{k+1}+2^{k+1}+\ldots+2^{k+1}}_{s \text{ termeni}} + \underbrace{2^k+2^k+\ldots+2^k}_{2^k-s \text{ termeni}}\right),$$

deci n este joli.

Soluţie alternativă a). Dacă $n = \dfrac{1}{k}\cdot(2^{\alpha_1}+...+2^{\alpha_k})$, atunci

$$n+1 = \frac{1}{k}\cdot(2^{\alpha_1}+...+2^{\alpha_k}+\underbrace{1+...+1}_{k}) = \frac{1}{2k}(2^{\alpha_1+1}+...+2^{\alpha_k+1}+\underbrace{2+...+2}_{k}).$$

Deci dacă n este joli, atunci şi $n+1$ este joli. De aici rezultă că dacă $m > 1$ ar fi un număr care nu este joli atunci nici $m-1$ nu ar joli, deci nici $m-2$, ..., nici 1 nu ar fi joli. Însă $1 = \dfrac{2^0+2^0}{2}$ este joli, absurd.
Aşadar nu există numere numerele naturale nenule care să nu fie joli.

b) Dacă pentru $n \geq 1$, putem scrie

$$2^n = \frac{2^{\alpha_1} + \ldots + 2^{\alpha_k}}{k},$$

unde $\alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_k$ sunt numere naturale distincte, atunci din paritate rezultă că $\alpha_1 \geq 1$ şi

$$2^{n-1} = \frac{2^{\alpha_1 - 1} + \ldots + 2^{\alpha_k - 1}}{k}.$$

Aşadar, dacă 2^n este superjoli atunci şi 2^{n-1} este superjoli, şi cum 1 nu e superjoli, nicio putere a lui 2 nu este superjoli.

c) Să observăm că $3 = (2+2^2)/2$, $5 = (2+2^3)/2$, $6 = (2^2+2^3)/2$, $7 = (1+2^2+2^4)/3$, $9 = (2+2^4)/2$, $10 = (2^2+2^4)/2$, $11 = (2^5+2^4+2^2+2+1)/5$ şi $12 = (2^4+2^3)/2$.

Vom arăta că 13 nu admite o astfel de scriere.
Să presupunem că există $k \in \mathbb{N}^*$ şi numerele $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{N}$, distincte, astfel încât

$$13 = \frac{1}{k}\left(2^{\alpha_1} + \ldots + 2^{\alpha_k}\right).$$

Atunci

$$13 \geq \frac{1 + 2 + \ldots + 2^{k-1}}{k} = \frac{2^k - 1}{k},$$

deci

$$13k + 1 \geq 2^k \tag{3}$$

Arătăm că pentru $k \geq 7$, nu poate avea loc inegalitatea (3).
Pentru aceasta notăm $a_k = \frac{13k+1}{2^k}$ şi observăm că $a_{k+1} < a_k$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ (această inegalitate este echivalentă cu $13k > 12 (k \in \mathbb{N}^*)$) şi cum $a_7 = \dfrac{92}{128} < 1$ toate numerele a_k cu $k > 7$ (fiind mai mici decât a_7) sunt subunitare, adică $13k + 1 < 2^k$ pentru orice $k \geq 7$.
(Inegalitatea $13k + 1 < 2^k$ pentru $k \geq 7$ se poate demonstra şi prin inducţie)
Pentru $k = 1, 2, ..., 6$ scriem numerele $13 \cdot k$ în baza 2 si observăm că nici unul nu are numarul de termeni egal cu valoarea lui k: $1 \cdot 13 = 2^0+2^2+2^3$, $2 \cdot 13 = 2^1+2^3+2^4$, $3 \cdot 13 = 2^5+2^2+2+1$, $4 \cdot 13 = 2^5+2^4+2^2$, $5 \cdot 13 = 2^6+2^9$, $6 \cdot 13 = 2^6+2^3+2^2+2$.
De aici rezultă concluzia.

□

CLASA A IX-A

Problema 1. Fie $a_1 \in \mathbb{R}$ cu $0 < a_1 < 1$. Definim prin recurenţă şirul de numere reale $a_{n+1} = 3a_n - 4a_n^3$, pentru orice $n \geq 1$.

a) Arătaţi că pentru orice n avem $|a_n| \leq 1$.

b) Arătaţi că pentru orice $k \geq 2$ putem alege termenul iniţial $a_1 \in (0, 1)$ astfel încât $a_{n+k} = a_n$ pentru orice $n \geq 1$.

Sergiu Moroianu
Bucureşti

Barem de corectare. Avem că:

$$\begin{aligned} 3a - 4a^3 \leq 1 &\iff (a+1)(2a-1)^2 \geq 0, \\ 3a - 4a^3 \geq -1 &\iff (a-1)(2a+1)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Deducem că, dacă $|a| \leq 1$ atunci $|3a - 4a^3| \leq 1$.
Prin inducţie după n rezultă că $|a_n| \leq 1$ pentru orice n.
Observăm că dacă $a_n = \sin t_n$ atunci $a_{n+1} = \sin(3t_n)$, deci prin inducţie după k se obţine că $a_{n+k} = \sin\left(3^k t_n\right)$.
Pentru $k \geq 2$ fixat, căutăm $t_1 = \arcsin(a_1) \in (0, \pi/2)$ astfel încât $3^k t_n \equiv t_n$ (mod 2π) pentru orice $n \geq 1$. Echivalent, vrem $3^{n-1}(3^k - 1)t_1 \equiv 0$ (mod 2π). Alegem $t_1 = \frac{2\pi}{3^k-1} \leq \frac{\pi}{4}$ şi $a_1 = \sin(\frac{2\pi}{3^k-1})$.

□

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 1, Craiova, 23 martie 2024

Problema 2. Fie triunghiul echilateral ABC şi $M, N \in (BC)$, $P, Q \in (CA)$ şi $R, S \in (AB)$ astfel încât $MN = PQ = RS$ şi $M \in (BN), P \in (CQ), R \in (AS)$. Arătaţi că există trei puncte necoliniare în interiorul hexagonului $MNPQRS$ care au aceeaşi sumă a distanţelor la laturile acestuia dacă şi numai dacă ARQ, BMS şi CPN sunt triunghiuri congruente.

Vasile Pop
Cluj-Napoca

Barem de corectare. Arătăm mai întâi că există trei puncte necoliniare în interiorul hexagonului $MNPQRS$ care au aceeaşi sumă a distanţelor la laturile acestuia dacă şi numai dacă triunghiul determinat de prelungirile segmentelor NP, QR şi SM este echilateral.

Suma distaţelor de la orice punct X interior hexagonului $MNPQRS$ la laturile acestuia este suma p_X a distanţelor de la X la laturile triunghiului ABC plus suma s_X a distanţelor de la X la NP, QR respectiv SM. Cum p_X este constantă (se deduce din indentitatea $[ABC] = [XAB] + [XBC] + [XCA]$, unde $[ABC]$ reprezintă aria triunghiului ABC etc.), atunci există trei puncte necoliniare X, Y şi Z în interiorul hexagonului $MNPQRS$ care au aceeaşi sumă a distanţelor la laturile acestuia dacă şi numai dacă $s_X = s_Y = s_Z$.

Considerăm versorii $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ perpendiculari pe laturile NP, QR, respectiv SM. Atunci, din calcul avem

$$\begin{aligned} d(X, NP) &= XN \cdot \sin(\measuredangle XNP) = XN \cdot \cos(\pi/2 - \measuredangle XNP) \\ &= \vec{v_1} \cdot \overrightarrow{XN} = \vec{v_1}(\overrightarrow{XO} + \overrightarrow{ON}), \end{aligned}$$

unde O este un punct fixat. Deducem că $s_X = d(X, NP) + d(X, QR) + d(X, SM) = \overrightarrow{XO} \sum \vec{v_i} + \sum \vec{v_1} \cdot \overrightarrow{ON}$, iar $s_X = s_Y = s_Z$ este echivalent cu

$$\overrightarrow{XO} \sum \vec{v_i} = \overrightarrow{YO} \sum \vec{v_i} = \overrightarrow{ZO} \sum \vec{v_i} \tag{1}$$

Dacă $v = \sum \vec{v_i}$ nu este nul, deducem că (1) este echivalentă cu $XY \perp v$ şi $XZ \perp v$, adică X, Y, Z coliniare, ceea contrazice ipoteza. Aşadar, există cele trei puncte cu proprietatea de mai sus dacă şi numai dacă $v = 0$ (2). Cum $|\vec{v_i}| = 1$, pentru orice $i = 1, 2, 3$, aceşti trei vectori sunt pe direcţii care fac 120° două câte două. Deducem că (2) este echivalent cu faptul că triunghiul determinat de prelungirile segmentelor NP, QR şi SM este echilateral.

Arătăm acum că triunghiul determinat de prelungirile segmentelor NP, QR şi SM este echilateral dacă şi numai dacă ARQ, BMS şi CPN sunt triunghiuri congruente.

Cum $\sum \overrightarrow{MN} = 0$ şi $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} = 0$, avem că $\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{SM} = 0$. Deducem atunci că vectorii din ultima sumă determină un triunghi echilateral, adică $NP = QR = SM$. Se obţine imediat că cele 3 triunghiuri sunt congruente (U.L.U.).

Pentru cealaltă implicaţie, fie $MS \cap NP = \{U\}$, $NP \cap RQ = \{V\}$, $RQ \cap MS = \{W\}$. Atunci, $\measuredangle UMN = \measuredangle BMS = \measuredangle NPC$ şi $\measuredangle MNU = \measuredangle PNC$, deci

$$m(\measuredangle NMU) + m(\measuredangle MNU) = m(\measuredangle NPC) + m(\measuredangle PNC) = 120^\circ,$$

adică $m(\measuredangle WUV) = 60^\circ$. Analog se arată că şi celelalte unghiuri au 60°, deci triunghiul UVW este echilateral.

Observaţie: Existenţa celor 3 puncte necoliniare din interiorul lui $MNPQRS$ cu suma distanţelor la laturile sale constantă implică, aşa cum arătă problema curentă, că ARQ, BMS şi CPN sunt triunghiuri congruente. Atunci dreptele NP, QR, SM determină un triunghi echilateral, deci pentru orice $X \in Int(MNPQRS)$, suma s_X este constantă. Aşadar, este suficient ca 3 puncte necoliniare să aibă suma distanţelor la laturile sale constantă ca toate punctele interioare hexagonului $MNPQRS$ să aibă această proprietate. $\square$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 1, Craiova, 23 martie 2024

Problema 3. Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că, pentru orice $x \in (-1, 1)$, avem

$$(x^2 + ax + b) \cdot \lfloor x^2 + cx + d \rfloor = \lfloor x^2 + ax + b \rfloor \cdot (x^2 + cx + d),$$

unde $\lfloor x \rfloor$ reprezintă partea întreagă a numărului real x. Arătaţi că $a = c$ şi $b = d$.

Cristi Săvescu
Cluj-Napoca

Barem de corectare. Fie funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite prin $f(x) = x^2 + ax + b$ şi $g(x) = x^2 + cx + d$.

Caz 1. $\lfloor f(x) \rfloor = 0$ pentru orice $x \in (-1, 1)$.
Arătăm mai întâi şi că $\lfloor g(x) \rfloor = 0$ pentru orice $x \in (-1, 1)$. Altfel, există un interval $(s, t) \subseteq (-1, 1)$ astfel încât $\lfloor g(x) \rfloor = n \neq 0$ pentru orice $x \in (s, t)$ (se poate deduce acest lucru folosind graficul funcţiei de gradul doi sau studiind intervalele de monotonie ale acesteia). Atunci $n \cdot f(x) = 0$, deci $f(x) = 0$ pentru orice $x \in (s, t)$, ceea ce conduce la o contradicţie.
În cazul în care $\lfloor f(x) \rfloor = \lfloor g(x) \rfloor = 0$ pentru orice $x \in (-1, 1)$, egalitatea din enunţ devine trivială. În acest caz vom demonstra că $f(x) = g(x) = x^2$.
Avem că $f : (-1, 1) \to [0, 1)$. Deducem că $|f(x) - f(y)| < 1$ pentru orice $x, y \in (-1, 1)$. Avem că $|f(x) - f(y)| = |x - y| \cdot |x + y + a|$. Fie $y \in (-1, 0)$, atunci $x = y + 1 \in (0, 1)$. Obţinem $|2y + a + 1| < 1$ pentru orice $y \in (-1, 0)$. În particular $|a| < 1$. (putem pune $y = -\frac{1}{2}$).
Dacă $a > 0$, alegem $y \in (-\frac{a}{2}, 0) \subseteq (-1, 0)$, care conduce la contradicţie.
Dacă $a < 0$, alegem $y \in (-1, -\frac{2+a}{2}) \subseteq (-1, 0)$, conducând din nou la o contradicţie. Astfel obţinem că $a = 0$.

Avem că $0 \leq x^2 + b < 1$ $\forall x \in (-1, 1)$. Pentru $x = 0$ obţinem că $0 \leq b < 1$. Dacă $b > 0$, alegem $x \in (\sqrt{1 - b}, 1) \subseteq (0, 1)$, de unde deducem o contradicţie şi astfel putem afirma că $b = 0$. Am obţinut că $f(x) = x^2$. Analog se arată că $g(x) = x^2$.

Caz 2. Există $x_0 \in (-1, 1)$ astfel încat $\lfloor f(x_0) \rfloor = n \neq 0$.
Atunci există un interval $(s, t) \subseteq (-1, 1)$ astfel încât $\lfloor f(x) \rfloor = n$ pentru orice $x \in (s, t)$. Cu siguranţă, $\lfloor g(x) \rfloor$ nu este identic 0 pe intervalul (s, t), altfel din relaţia din enunţ am obţine că $n \cdot g(x) = 0$, adică $g(x) = 0$ $\forall x \in (s, t)$, ceea ce ar duce la o contradicţie. Aşadar, putem găsi un subinterval $(u, v) \subseteq (s, t)$ astfel încât $\lfloor g(x) \rfloor = m \neq 0$ pentru orice $x \in (u, v)$.

Relaţia din enunţ devine:

$$m \cdot f(x) = n \cdot g(x)$$

pentru orice $x \in (u, v)$. De unde deducem că $m = n \neq 0$, $m \cdot a = n \cdot c$ şi $m \cdot b = n \cdot d$, astfel că $a = c$ şi $b = d$.

$\square$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 1, Craiova, 23 martie 2024

Problema 4. O factorizare a unui număr natural constă în scrierea acestuia ca produs de numere naturale strict mai mari ca 1. Două factorizări sunt considerate esenţial egale dacă diferă doar prin ordinea factorilor. De exemplu, 18 are exact 4 factorizări esenţial diferite: 18, $2 \cdot 9$, $3 \cdot 6$ şi $2 \cdot 3 \cdot 3$. Pentru un număr natural nenul n notăm cu $f(n)$ numărul de factorizări esenţial diferite ale lui n. În exemplul de mai sus $f(18) = 4$. Prin convenţie, punem $f(1) = 1$. Să se arate că:

$$f(n) \leq n,$$

pentru orice număr natural nenul n.

* * *

Barem de corectare. Avem nevoie de următoarea lemă:
Pentru orice număr natural $n \geq 2$

$$\sum_{d|n} \frac{1}{d} < q,$$

unde q *este cel mai mare număr prim care îl divide pe* n.

Într-adevăr, dacă $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ este descompunerea în factori primi a lui n cu $p_1 < \ldots < p_k$, atunci avem:

$$\sum_{d|m} \frac{1}{d} = \prod_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{\alpha_i} \frac{1}{p_i^j} = \prod_{i=1}^{k} \frac{1 - \frac{1}{p_i^{\alpha_i+1}}}{1 - \frac{1}{p_i}} < \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i}} = \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i}{p_i - 1}.$$

Cum $p_i \geq p_{i-1} + 1$ pentru toţi $i \in \overline{1, k}$ (punem $p_0 = 1$), obţinem că:

$$\sum_{d|m} \frac{1}{d} < \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i}{p_i - 1} \leq \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i}{p_{i-1}} = p_k,$$

ceea ce încheie demonstraţia lemei.

Trecem acum să demonstrăm problema prin inducţie după n. Pentru $n = 2$ se verifică imediat că $f(2) = 1 \leq 2$. Presupunem că afirmaţia din enunţ este adevărată pentru toate numerele naturale mai mici sau egale cu $n - 1$ şi o demonstrăm pentru n. Fie $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ descompunerea în factori primi a lui n, astfel încât $p_1 < \ldots < p_k$.

Distingem două cazuri:

Cazul I: $\alpha_k = 1$

Dacă $k = 1$, atunci n este un număr prim si $f(n) = 1 \leq n$.

Dacă $k \geq 2$, atunci orice factorizare a lui n are exact un factor divizibil cu p_k, deci dacă notăm cu $n^* := \frac{n}{p_k}$ atunci avem că:

$$f(n) = \sum_{d|n^*} f(\frac{n^*}{d}) \leq \sum_{d|n^*} \frac{n^*}{d} = n^* \sum_{d|n^*} \frac{1}{d} \leq n^* \cdot p_{k-1} < n,$$

unde în penultima inegalitate am aplicat lema de mai sus.

Cazul II: $\alpha_k > 1$

În acest caz, fie $n^* := \frac{n}{p_k} \cdot q$, unde q este orice număr prim cu $q > p_k$. Atunci, orice factorizare $n = d_1 \cdot ... \cdot d_s$, cu d_1 cel mai mare factor divizibil cu p_k, dă naştere următoarei factorizări a lui n^*:

$$n^* = (\frac{d_1}{p_k} q) \cdot d_2 \cdot ... d_s.$$

Este clar că factorizări esenţial diferite ale lui n dau naştere la factorizări esenţial diferite ale lui n^*, astfel că $f(n) \leq f(n^*)$. Ca în cazul precedent, notăm cu $m := \frac{n^*}{q} = \frac{n}{p_k} < n$ şi avem:

$$f(n) \leq f(n^*) = \sum_{d|m} f(\frac{m}{d}) \leq m \sum_{d|m} \frac{1}{d} \leq m \cdot p_k = n,$$

unde în ultima inegalitate am aplicat încă o dată lema de mai sus. Aceasta încheie inducţia şi demonstraţia problemei.

$\square$

CLASA A X-A

Problema 1. Fie $n \geqslant 3$ şi $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Pentru orice $f : A \to A$, definim mulţimea

$$A_f = \{|f(1) - f(2)|, |f(2) - f(3)|, \ldots, |f(n-1) - f(n)|, |f(n) - f(1)|\}.$$

Determinaţi cea mai mică, respectiv cea mai mare valoare pe care o poate lua cardinalul mulţimii A_f, când f parcurge familia funcţiilor bijective definite pe A cu valori în A.

Silviu Cristea
Cluj-Napoca

Barem de corectare. Fie $f : A \to A$ o bijecţie. Atunci există $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ pentru care $f(i) = 1$, iar din injectivitate, valorile $|f(i+1) - f(i)|$ şi $|f(i-1) - f(i)|$ sunt diferite (argumentele sunt luate modulo n). Atunci $|A_f| \geqslant 2$.
Dacă f este funcţia identică, atunci $|A_f| = 2$.
Fie $f : A \to A$ o bijecţie, atunci $1 \leqslant |f(i) - f(j)| \leqslant n - 1$, pentru orice $i \neq j$.
Avem că $A_f \subseteq \{1, 2, \ldots, n-1\}$, deci $|A_f| \leqslant n - 1$.
Dacă $f(1), f(2), \ldots, f(n)$ sunt $1, n, 2, n-1, 3, n-2, \ldots$, observăm că

$$A_f = \{1, 2, \ldots, n-1\},$$

deci $|A_f| = n - 1$. Atunci, valorile cerute sunt 2 şi $n - 1$.

$\square$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 1, Craiova, 23 martie 2024

Problema 2. Fie $a, b, c > 1$. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\log_{a+b}(a^x + b) = \log_b((b+c)^x - c)$.

Mihai Opincariu
Brad

Barem de corectare. Notăm cu $t = \log_{a+b}(a^x + b) = \log_b((b+c)^x - c)$. Atunci avem relaţiile

$$(a+b)^t = a^x + b \tag{1}$$

şi

$$b^t + c = (b+c)^x \tag{2}$$

Dacă $x \geqslant t$, atunci din (1) avem $a^x + b \leqslant (a+b)^x$, sau $\left(\dfrac{a}{a+b}\right)^x + b\left(\dfrac{1}{a+b}\right)^x \leqslant 1$

Funcţia $f(x) = \left(\dfrac{a}{a+b}\right)^x + b\left(\dfrac{1}{a+b}\right)^x$ este strict descrescătoare, deci $x \geqslant 1$

Analog, folosind (2), obţinem $x \leqslant 1$, deci avem doar soluţia $x = 1$

Cazul $x \leqslant t$ se tratează analog. Singura soluţie este atunci $x = 1$

$\square$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 1, Craiova, 23 martie 2024

Problema 3. Fie $n \geqslant 2$ un număr natural par. Determinaţi cel mai mare număr natural natural $m \geqslant 2^{n-2}+1$ cu proprietatea că există m submulţimi distincte ale mulţimii $\{1, 2, \dots, n\}$, oricare $2^{n-2}+1$ dintre ele având intersecţia vidă.

Cristi Săvescu
Cluj-Napoca

Barem de corectare. Notăm $n = 2t$. Observăm că familia submulţimilor cu cel mult t elemente verifică. Într-adevăr, fiecare $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ apare în submulţimile de forma $\{i\} \cup A$, unde $A \subset \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i\}$ cu $|A| \leqslant t-1$, în număr de $\sum_{k=0}^{t-1} C_{n-1}^k = \frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} = 2^{n-2}$. Atunci $m \geqslant \sum_{k=0}^{t} C_n^k$.

Fie $\mathcal{F}$ o familie cu m submulţimi ale mulţimii $\{1, 2, \dots, n\}$ care îndeplineşte condiţiile din enunţ. Notăm cu $a_i = |\{A \in \mathcal{F} | i \in A\}|$. Atunci $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{A \in \mathcal{F}} |A|$ (1).

Din ipoteză avem $a_i \leqslant 2^{n-2}$, pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, deci $\sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant n \cdot 2^{n-2}$ (2).

Întrucât $\{1, 2, \dots, n\}$ are C_n^k submulţimi cu k elemente, pentru orice $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, avem $\sum_{A \in \mathcal{F}} |A| \geqslant 0 \cdot C_n^0 + 1 \cdot C_n^1 + 2 \cdot C_n^2 + \dots + t \cdot C_n^t + (t+1)\left(m - \sum_{k=0}^{t} C_n^k\right)$ (3).

Cum $\sum_{k=0}^{t} k \cdot C_n^k = n \cdot \sum_{k=0}^{t-1} C_{n-1}^k = n \cdot 2^{n-2}$, din (1), (2) şi (3) deducem că $m \leqslant \sum_{k=0}^{t} C_n^k$.

Aşadar valoarea maximă căutată este $m = \sum_{k=0}^{t} C_n^k = \frac{2^n + C_n^{n/2}}{2}$.

$\square$

Problema 4. Determinaţi numerele naturale $n \geqslant 3$ pentru care există o mulţime M de n numere complexe nenule şi un număr natural nenul m astfel încât $(1+z_1z_2z_3)^m = 1$, pentru orice numere distincte două câte două $z_1, z_2, z_3 \in M$.

Vlad Matei
Bucureşti

Barem de corectare. Pentru $n = 3$, fie $M = \{z, v, w\}$ unde $zvw = \varepsilon - 1$, unde ε este o rădăcină primitivă de ordinul 3 a unităţii. Atunci $(1 + zvw)^3 = \varepsilon^3 = 1$.

Pentru $n = 4$, fie $M = \sqrt[3]{5}\cdot\left\{\frac{1}{\varepsilon-1}, \frac{1}{\varepsilon^2-1}, \frac{1}{\varepsilon^3-1}, \frac{1}{\varepsilon^4-1}\right\}$, unde ε este o rădăcină primitivă de ordin 5 a unităţii. Elemente din M au produsul $\sqrt[3]{5}$, deci orice produs a trei elemente ale sale este de forma $\varepsilon^i - 1$. Ipoteza se verifică pentru $m = 5$.

Arătăm că $n \geqslant 5$ nu verifică. Altfel, alegem $\{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\} \subset M$ şi $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{m} + i\sin\frac{2\pi}{m}$. Atunci $z_1z_2z_3 = \varepsilon^a - 1$, $z_3z_4z_5 = \varepsilon^b - 1$, $z_1z_3z_4 = \varepsilon^c - 1$ şi $z_2z_3z_5 = \varepsilon^d - 1$, unde $1 \leqslant a, b, c, d \leqslant m-1$. Deducem că $(\varepsilon^a - 1)(\varepsilon^b - 1) = (\varepsilon^c - 1)(\varepsilon^d - 1)$ (1)

Conjugăm (1) şi obţinem $\frac{(\varepsilon^a - 1)(\varepsilon^b - 1)}{\varepsilon^{a+b}} = \frac{(\varepsilon^c - 1)(\varepsilon^d - 1)}{\varepsilon^{c+d}}$; ultima egalitate împreună cu (1) ne dă $\varepsilon^{a+b} = \varepsilon^{c+d}$. Revenind în (1), obţinem $\varepsilon^a + \varepsilon^b = \varepsilon^c + \varepsilon^d$, care se rescrie $\varepsilon^{a+c} + \varepsilon^{b+c} = \varepsilon^{2c} + \varepsilon^{c+d} = \varepsilon^{2c} + \varepsilon^{a+b}$ sau $(\varepsilon^a - \varepsilon^c)(\varepsilon^c - \varepsilon^b) = 0$, deci $a = c$ sau $b = c$, ceea ce ar implica $z_2 = z_4$ sau $z_1 = z_5$, fals. Aşadar, $n \in \{3, 4\}$.

$\square$

CLASA A XI-A

Problema 1. Găsiţi toate funcţiile continue f şi g pentru care oricum am alege două şiruri $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ cu proprietatea că $(a_n + b_n)_{n\geq 1}$ este convergent, atunci şirul $(f(a_n) + g(b_n))_{n\geq 1}$ este convergent.

***

Barem de corectare. Fie x, y şi ℓ trei numere reale. Definim şirurile:

$$a_n = \begin{cases} x, & \text{pentru } n \text{ par} \\ y, & \text{pentru } n \text{ impar} \end{cases}$$

şi $b_n = \ell - a_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Cum $a_n + b_n$ este şir constant, deci convergent, deducem că $f(a_n)+g(b_n)$ este convergent, deci constant. Cu alte cuvinte, $f(x)+g(\ell-x) = f(y) + g(\ell - y)$, pentru orice x, y, ℓ numere reale.

Pentru $\ell = y$ obţinem că

$$f(y) - f(x) = g(y - x) - g(0) \tag{1}$$

Punem $x = 0$ în (1) şi obţinem că $g(y) = f(y) + c$, pentru o constantă c.

Înlocuind în (1), obţinem că $f(y) - f(x) = f(y - x) - f(0)$. Definim funcţia $h(x) = f(x) - f(0)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ şi deducem că $h(x + y) = h(x) + h(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Cum h satisface ecuaţia funcţională a lui Cauchy, obţinem că h este funcţie liniară, iar de aici se deduce că $f(x) = \alpha x + \beta$ şi $g(x) = \alpha x + \gamma$, pentru nişte constante reale α, β, γ.

Reciproc, dacă f şi g au forma de mai sus, atunci ele verifică condiţia din enunţ.

$\square$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 1, Craiova, 23 martie 2024

Problema 2. Găsiţi toate funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotone şi derivabile de două ori astfel încât

$$f'' + 4f + 3f^2 + 8f^3 = 0.$$

***

Barem de corectare. Înmulţim ecuaţia cu $2f'$ şi notând cu $g = (f')^2 + 4f^2 + 2f^3 + 4f^4$ obţinem că $g' = 0$, deci g este constantă. Atunci $f^2(1+\frac{1}{2}f+f^2)$ este mărginită, deci f este mărginită pentru că $\frac{3}{2}|f|^3 \leq f^2(1+\frac{1}{2}f+f^2)$.

Cum f este monotonă şi mărginită, $\lim_{x\to\infty} f(x)$ există şi este finită. Trecând la limită în ecuatia din enunţ, obţinem că $\lim_{x-\to\infty} f''(x)$ există si este finită. Analog, trecând la limită în $g = (f')^2 + 4f^2 + 2f^3 + 4f^4$ şi ţinând cont de faptul că g este constantă, obţinem că $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ există şi este finită (aici am ţinut cont de faptul că f este monotonă, deci f' are semn constant).

Aplicăm teorema lui Lagrange pe intervalul $[n, n+1]$ şi obţinem că există un şir x_n astfel încât $x_n \in (n, n+1)$ şi $f'(x_n) = f(n+1) - f(n)$, deci $\lim_{n\to\infty} f'(x_n) = 0$. Deducem că $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$. Acelaşi raţionament ne dă că $\lim_{x\to\infty} f''(x) = 0$.

Trecând la limită în ecuaţia din enunţ, obţinem că $4\ell + 3\ell^2 + 8\ell^3 = 0$, unde $\ell = \lim_{x\to\infty} f(x)$. Deducem că $\ell = 0$. Trecând la limită în ecuaţia $g = (f')^2 + 4f^2 + 2f^3 + 4f^4$, obţinem că $g = 0$. Din $g \geq (f')^2$ rezultă că $f' = 0$, deci f este constantă, adică $f = 0$.

$\square$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 1, Craiova, 23 martie 2024

Problema 3. Fie A şi B două matrici $n \times n$ cu elemente numere întregi, iar p un număr prim. Să se arate că:

$$\mathrm{Tr}(A+B)^p \equiv \mathrm{Tr}(A^p + B^p) \pmod p,$$

unde $\mathrm{Tr}X$ este urma matricei X.

***

Barem de corectare. Fie $\mathcal{F}$ mulţimea tuturor funcţiilor

$$f : \{0, 1, ..., p-1\} \to \{A, B\}.$$

Avem că:

$$(A+B)^p = \sum_{f \in \mathcal{F}} f(0) \cdot f(1) \cdot ... \cdot f(p-1),$$

deci

$$\mathrm{Tr}(A+B)^p = \sum_{f \in \mathcal{F}} \mathrm{Tr}(f(0) \cdot f(1) \cdot ... \cdot f(p-1)).$$

Notăm cu σ permutarea ciclică $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & p-2 & p-1 \\ 1 & 2 & \cdots & p-1 & 0 \end{pmatrix}$ şi folosind egalitatea cunoscută $\mathrm{Tr}(XY) = \mathrm{Tr}(YX)$, obţinem că

$$\mathrm{Tr}(f(0) \cdot f(1) \cdot ... \cdot f(p-1)) = \mathrm{Tr}((f \circ \sigma)(0) \cdot (f \circ \sigma)(1) \cdot ... \cdot (f \circ \sigma)(p-1)).$$

Iterând, obţinem şi egalitatea:

$$\mathrm{Tr}(f(0) \cdot f(1) \cdot ... \cdot f(p-1)) = \mathrm{Tr}((f \circ \sigma^k)(0) \cdot (f \circ \sigma^k)(1) \cdot ... \cdot (f \circ \sigma^k)(p-1)),$$

pentru toţi $k \in \mathbb{N}$.

Să observăm că dacă $f = f \circ \sigma^k$ pentru un $k \in \{1, 2, ..., p-1\}$, atunci f este constantă. Într-adevăr, egalitatea precedentă este echivalentă cu

$$f(i) = f(i + k \pmod p)), \forall i \in \{0, 1, ..., p-1\},$$

(unde $i + k \pmod p$ este restul împărţirii la p). Iterând, obţinem şi că:

$$f(i) = f(i + kl \pmod p)), \forall i \in \{0, 1, ..., p-1\}, \forall l \in \mathbb{N}.$$

Alegând l astfel încât $kl \equiv 1 \pmod p$ (acesta există pentru că p este prim), obţinem că

$$f(i) = f(i+1 \pmod p)), \forall i \in \{0, 1, ..., p-1\},$$

adică f este constantă.

Avem două funcţii constante în $\mathcal{F}$, iar celelalte apar în grupări de câte p elemente de forma:

$$\{f, f \circ \sigma, ..., f \circ \sigma^{p-1}\}.$$

Luând un reprezentant în fiecare grupare şi notând cu $\mathcal{R}$ această mulţime, avem că:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(A+B)^p &= \mathrm{Tr}(A^p + B^p) + \sum_{f \in \mathcal{R}} \sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{Tr}((f \circ \sigma^k)(0) \cdot (f \circ \sigma^k)(1) \cdot ... \cdot (f \circ \sigma^k)(p-1)) \\
&= \mathrm{Tr}(A^p + B^p) + \sum_{f \in \mathcal{R}} p \mathrm{Tr}(f(0) \cdot f(1) \cdot ... \cdot f(p-1)) \\
&\equiv \mathrm{Tr}(A^p + B^p) \pmod p.
\end{aligned}$$

Observaţie: În general $\mathrm{Tr}(ABC) \neq \mathrm{Tr}(BAC)$. De exemplu, pentru:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

obţinem că $ABC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, iar $BAC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

În particular, nu putem concluziona că

$$\mathrm{Tr}(f(0) \cdot f(1) \cdot ... \cdot f(p-1)) = \mathrm{Tr}(A^{p-k} B^k),$$

unde k este cardinalul mulţimii $\{i | 0 \leq i \leq p-1, f(i) = B\}$. Dacă acest lucru ar fi fost adevărat atunci demonstraţia ar fi curs astfel:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(A+B)^p &= \sum_{f \in \mathcal{F}} \mathrm{Tr}(f(0) \cdot f(1) \cdot ... \cdot f(p-1)) \\
&= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \mathrm{Tr}(A^{p-k} B^k) \\
&\equiv \mathrm{Tr}(A^p) + \mathrm{Tr}(B^p) \pmod p.
\end{aligned}$$

□

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 1, Craiova, 23 martie 2024

Problema 4. Fie $n \geqslant 2$. Determinaţi matricele $A \in M_n(\mathbb{C})$ cu proprietatea că

$$\operatorname{rang}(A^2) + \operatorname{rang}(B^2) \geqslant 2 \cdot \operatorname{rang}(AB),$$

pentru orice $B \in M_n(\mathbb{C})$.

Cristi Săvescu
Cluj-Napoca

Barem de corectare. Observăm că matricea $A = 0_n$ respectă inegalitatea dată, pentru orice $B \in M_n(\mathbb{C})$. De asemenea, toate matricile inversabile A verifică inegalitatea dată, întrucât pentru orice $B \in M_n(\mathbb{C})$, aplicând succesiv inegalitatea produsului şi cea a lui Sylvester, avem

$$\operatorname{rang}(A^2) + \operatorname{rang}(B^2) = n + \operatorname{rang}(B^2) \geqslant 2 \cdot \operatorname{rang}(B) \geqslant 2 \cdot \operatorname{rang}(AB).$$

Mai departe, considerăm $A \neq 0_n$ o matrice neinversabilă cu proprietatea dată şi fie $r = \operatorname{rang}(A) \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

Amintim că $\operatorname{rang}(PQ) = \operatorname{rang}(Q)$ pentru orice matrice $P, Q \in M_n(\mathbb{C})$, cu P inversabilă (1).

De asemenea, $\operatorname{rang}(PQ) = \operatorname{rang}(P)$ pentru orice matrice $P, Q \in M_n(\mathbb{C})$, cu Q inversabilă (2).

Întrucât $\operatorname{rang}(A) = r$, există matricele inversabile $P, Q \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A = PI_rQ$, unde I_r este matricea cu primele r elemente de pe diagonala principală egale cu 1 şi restul elementelor nule.

Fie $K \in M_n(\mathbb{C})$ o matrice inversabilă oarecare şi $B = Q^{-1}I_rK$. Atunci $AB = PI_rK$, deci din (1) şi (2) deducem că

$$\operatorname{rang}(AB) = \operatorname{rang}(PI_rK) = \operatorname{rang}(PI_r) = \operatorname{rang}(I_r) = r.$$

Atunci, revenind la inegalitatea din ipoteză, avem

$$r + \operatorname{rang}(B^2) \geqslant \operatorname{rang}(A^2) + \operatorname{rang}(B^2) \geqslant 2 \cdot \operatorname{rang}(AB) = 2r,$$

deci $\operatorname{rang}(B^2) \geqslant r$. Dar $\operatorname{rang}(B^2) \leqslant \operatorname{rang}(B) = \operatorname{rang}(Q^{-1}I_rK) = r$, deci $\operatorname{rang}(B^2) = r$.

Cum matricea K a fost aleasă aleator, deducem că

$$\operatorname{rang}(I_rKQ^{-1}I_r) = \operatorname{rang}(Q^{-1}I_rKQ^{-1}I_rK) = \operatorname{rang}(B^2) = r,$$

pentru orice matrice inversabilă $K \in M_n(\mathbb{C})$. Cum funcţia $X \to XQ^{-1}$ este o bijecţie de la mulţimea matricilor inversabile din $M_n(\mathbb{C})$ la ea însăşi, concluzionăm că $\operatorname{rang}(I_rXI_r) = r$, pentru orice matrice inversabilă X.

Matricea $I_r X I_r$ este blocul $r \times r$ din colţul din stânga sus al matricei X, deci relaţia obţinută arată că orice matrice inversabilă din $M_n(\mathbb{C})$ are blocul $r \times r$ din colţul din stânga sus inversabil. Acest lucru îl contrazice însă matricea inversabilă $X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

Concluzionăm că singurele matrice care verifică ipoteza sunt matricea nulă şi matricele inversabile.

$\square$

CLASA A XII-A

Problema 1. Fie a, b numere raţionale, $a > 1$, $b > 1$ şi $\mathcal{F}_{a,b}$ mulţimea funcţiilor $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ care verifică ecuaţia funcţională:

$$f(ax) = bf(x), \quad \forall\, x \geq 0. \tag{1}$$

a) Să se arate că în mulţimea $\mathcal{F}_{a,b}$ există funcţii integrabile pe orice interval, cât şi funcţii neintegrabile pe orice interval.
b) Dacă $f \in \mathcal{F}_{a,b}$ este integrabilă pe $[0, \infty)$ şi $\int_{\frac{1}{a}}^{a} f(x)dx = 1$, să se determine:

$$A = \int_a^{a^2} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{şi} \quad B = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Vasile Pop
Cluj-Napoca

Barem de corectare. a) Funcţia de tip Dirichlet $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad x \in \mathbb{Q} \\ b^k, & \text{dacă} \quad x \in [a^k, a^{k+1}) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

verifică ecuaţia (1) şi este neintegrabilă pe orice interval $[c, d] \subseteq [0, \infty)$ (sumele Riemann corespunzătoare punctelor intermediare $\xi_i \in \mathbb{Q}$ dau valoarea 0, iar cele în care $\xi_i \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ dau constante nenule, pentru diviziuni cu norma suficient de mică, depinzând doar de intervalul $[c, d]$).

Există şi funcţii continue cu proprietatea (1), de exemplu

$$f(x) = x^\alpha,\ x \geq 0 :\ (ax)^\alpha = bx^\alpha \Leftrightarrow a^\alpha = b \Leftrightarrow \alpha = \log_a b,$$

deci funcţia $f(x) = x^{\log_a b} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ este integrabilă.

b) Avem

$$1 = \int_{\frac{1}{a}}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{a}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^a f(x)\,\mathrm{d}x = I + J$$

În I facem schimbarea de variabilă $x = \dfrac{t}{a}$ şi obţinem:

$$I = \int_1^a f\left(\frac{t}{a}\right) \cdot \frac{1}{a}\,\mathrm{d}t \overset{(1)}{=} \frac{1}{a}\int_1^a \frac{1}{b} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{ab} \cdot J,$$

astfel că $\quad 1 = \left(\dfrac{1}{ab} + 1\right) \cdot J, \quad$ deci $\quad J = \dfrac{ab}{1 + ab}$

Avem:

$$A=\int_a^{a^2} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^a f(at)\cdot a\,\mathrm{d}t \overset{(1)}{=} ab\cdot J=\frac{(ab)^2}{1+ab}$$

$$B=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{a^{-1-k}}^{a^{-k}} f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(a^{-1-k}t)}{a^{k+1}}\,\mathrm{d}t \overset{(1)}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(ab)^{k+1}}\cdot J$$

$$\frac{1}{1+ab}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(ab)^k}=\frac{ab}{(ab)^2-1}.$$

$\square$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 1, Craiova, 23 martie 2024

Problema 2. a) Fie k un număr natural nenul şi G un grup cu mai puţin de $4k^2$ elemente. Dacă $Z(G)$ conţine cel puţin $\varphi(k)+1$ elemente de ordin k, arătaţi că G e abelian.
b) Găsiţi un grup necomutativ G cu $|G| = 16$ astfel încât $Z(G)$ conţine doua elemente de ordin 2.

Robert Rogozsan
Bucureşti

Barem de corectare. a) Fie $x \in Z(G)$ cu $o(x) = k$. Se cunoaşte faptul că $o\left(x^t\right) = \dfrac{o(x)}{(o(x), t)}$, $\forall t \in \mathbb{N}^*$.

Aşadar, pentru $t = \overline{1, k}$, $o\left(x^t\right) = \dfrac{k}{(k, t)}$, deci $o(x^t) = k \iff (k, t) = 1$. Atunci în $\langle x \rangle$ există exact $\varphi(k)$ elemente de ordin k. Din ipoteză avem deci că există $y \in Z(G) \setminus \langle x \rangle$ cu $o(y) = k$.

Fie P subgrupul generat de x, y în $Z(G)$. Cum $Z(G)$ este abelian se observă uşor că $P = \{x^a y^b \mid a, b \in \overline{0, k-1}\}$. Analizăm acum cardinalul acestei mulţimi. Fie $a, b, c, d \in \overline{0, k-1}$ cu $x^a y^b = x^c y^d$. Atunci $x^{a-c} = y^{d-b}$ şi cum $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{e\}$ obţinem $x^{a-c} = y^{d-b} = e$. Deci $k|(a-c)$ şi $k|(d-b)$, iar cum $-(k-1) \leq a-c; d-b \leq k-1$ obţinem $a = c$ şi $b = d$. Aşadar mulţimea P are exact $k \cdot k = k^2$ elemente.

Cum $P \leq Z(G)$ obţinem din Teorema lui Lagrange că $k^2|\#Z(G)$. Cum $\#Z(G) \leq \#G < 4k^2$ deducem că $Z(G) = ak^2$ unde $a \in \{1, 2, 3\}$. Aşadar $G/Z(G)$ are cel mult 3 elemente, deci este un grup ciclic. De aici rezultă imediat că G este abelian.

b) Considerăm grupul $G_1 = D_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sau grupul $G_2 = Q_8 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ unde D_4 este grupul diedral de ordin 4(grupul de simetrie al pătratului) şi Q_8 este grupul cuaternionilor. Elementul adăugat din $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ este un element care comută cu toate elementele din D_4 sau Q_8. Se ştie că centrul fiecărui din aceste două grupuri, D_4 sau Q_8, este $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Deci în ambele cazuri $Z(G_i) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

$\square$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 1, Craiova, 23 martie 2024

Problema 3. Determinaţi toate inelele comutative R cu $|R| \geq 4$, care nu sunt corpuri, astfel încât oricare ar fi $a, b, c \in R$ nenule şi distincte

$$ab + bc + ca$$

este un element inversabil al inelului R.

Vlad Matei
Bucureşti

Barem de corectare. Fie $x \neq 0$ un element neinversabil al inelului R. Dacă $2x \neq 0$ putem considera elementele $x, -x, 1$ care sunt toate distincte şi de aici ar rezulta că $-x^2$ este inversabil,aşadar x este inversabil contradicţie. Obţinem $2x = 0$ pentru fiecare element neinversabil x.

Deducem că 2 nu este inversabil altfel $x = 0$, contradicţie cu $x \neq 0$. Deci $4 = 0$ dacă punem $x = 2$.

Dacă $2 \neq 0$ atunci pentru $b \neq 2, -1, 0$ arbitrar în inel cum elementele $b, -1, 2$ sunt distincte nenule; altfel $-1 = 2$ deci $3 = 0$. Cum $4 = 0$ deducem că $1 = 0$ contradicţie. Deci avem că $b - 2$ este inversabil; dacă notăm $x = b - 2$ avem că x este inversabil dacă $x \neq 0, 1, 2$. Aşadar 2 este singurul element nenul neinversabil.

Dacă $|R| = 4$ atunci inelul R este $\{0, \pm 1, 2\}$ unde $4 = 0$ care verifică; R este izomorf cu $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Pentru $|R| \geq 5$ găsim $x \neq \pm 1$ inversabil. $2x$ nu poate fi inversabil deoarece ar rezulta că 2 este inversabil. Cum 2 este unicul element neinversabil trebuie să avem $2x = 2$ deci $2(1 - x) = 0$. Avem $1 - x \neq 0, \pm 1, 2$ deci $1 - x$ este de asemenea inversabil; 2 fiind unicul element neinversabil. Aşadar $2 = 0$.

Am presupus că R nu este corp. Revenind la alegerea unui element neinversabil $x \neq 0$ să considerăm elementele $x, x + 1, 1$ care sunt toate distincte deci $x^2 + x + 1$ este inversabil. Dacă $x \neq x^2$ atunci $x, x^2, 1$ sunt distincte. Deci $x^3 + x^2 + x = x(x^2 + x + 1)$ este inversabil şi asta ar implica că x este inversabil, o contradicţie. Obţinem că $x^2 = x$.

Să observăm că pentru orice $r \neq 0, 1, x, x+1$ din inel cum elementele $r, x, x+1$ sunt distincte avem că $rx + r(x+1) + x(x+1) = 2rx + x^2 + x + r = r$ este inversabil, folosind $x^2 = x$ şi faptul că inelul are caracteristica 2. Deci x şi $x + 1$ sunt singurele elemente neinversabile.

Dacă R are cel puţin 5 elemente există $r \neq 1$ în inel inversabil. Să observăm că rx nu este inversabil deci trebuie ca $rx = x$ sau $rx = x + 1$. Ultima imediat implică că x ar fi inversabil o contradicţie. Prima egalitate o putem rescrie $(r - 1)x = 0$ deci $r - 1$ nu este inversabil, de unde deducem $r - 1 = x, x + 1$ sau $r = x, x + 1$ o contradicţie cu alegerea lui r.

Conchidem că singurul astfel de inel este $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

$\square$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 1, Craiova, 23 martie 2024

Problema 4. Fie $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ o funcţie continuă şi periodică de perioadă 1. Să se arate că pentru orice $a \in \mathbb{R}$ avem:

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x+a)} dx \geq 1$$

***

Barem de corectare. Să arăm mai întâi că inegalitatea are loc pentru $a \in \mathbb{Q}$. Fie $a = \frac{p}{q}$. Rescriem integrala ca

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x+a)} = \sum_{k=0}^{q-1} \int_{k/q}^{(k+1)/q} \frac{f(x)}{f(x+p/q)} dx \geq 1$$

Pentru fiecare interval facem schimbarea de variabilă $x = x + k/q$. Fie $g_k(x) = \dfrac{f(x+k/q)}{f(x+(p+k)/q)}$. Atunci avem

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x+a)} = \int_0^{1/q} \sum_{k=0}^{q-1} g_k(x)\, dx.$$

Folosind periodicitatea lui f avem că $g_0(x)g_1(x)\ldots g_{q-1}(x) = 1$ deoarecele numerele $p+k$ modulo q reprezintă o permutarea a numerelor $0, 1, \ldots, q-1$ modulo q. Din inegalitatea mediilor $\sum_{k=0}^{q-1} g_k(x) \geq q\sqrt[q]{g_0(x)g_1(x)\ldots g_{q-1}(x)} = q$. Deci

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x+a)} \geq \int_0^{1/q} q\, dx = 1$$

Pentru a irational să luăm un şir de numerele raţionale $a_n \to a$.

Folosind Weierstrass pe intervalul $[0, 1]$ avem că există $c \in [0, 1]$ cu $m = f(c) = \inf_{x \in [0,1]} f(x) > 0$ şi $M = f(d) = \sup_{x \in [0,1]} f(x) > 0$; din periodicitate avem $m < f(x) < M$.

Cum f este uniform continuă pe $[0, 1]$ fiind compact avem că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât dacă $|x_1 - x_2| < \delta$ atunci $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

În cazul nostru cum $a_n \to a$ avem

$$\left| \frac{f(x)}{f(x+a)} - \frac{f(x)}{f(x+a_n)} \right| = \frac{f(x)|f(x+a_n) - f(x+a)|}{f(x+a)f(x+a_n)} < \frac{M\varepsilon}{m^2}$$

deci
$$\left|\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x+a)}\,dx - \int_0^1 \frac{f(x)}{f(x+a_n)}\,dx\right| < \frac{M\varepsilon}{m^2}$$
pentru $n \geq N_\varepsilon$.

Aşadar
$$\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x+a)} = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{f(x)}{f(x+a_n)}\,dx \geq 1.$$
$\square$